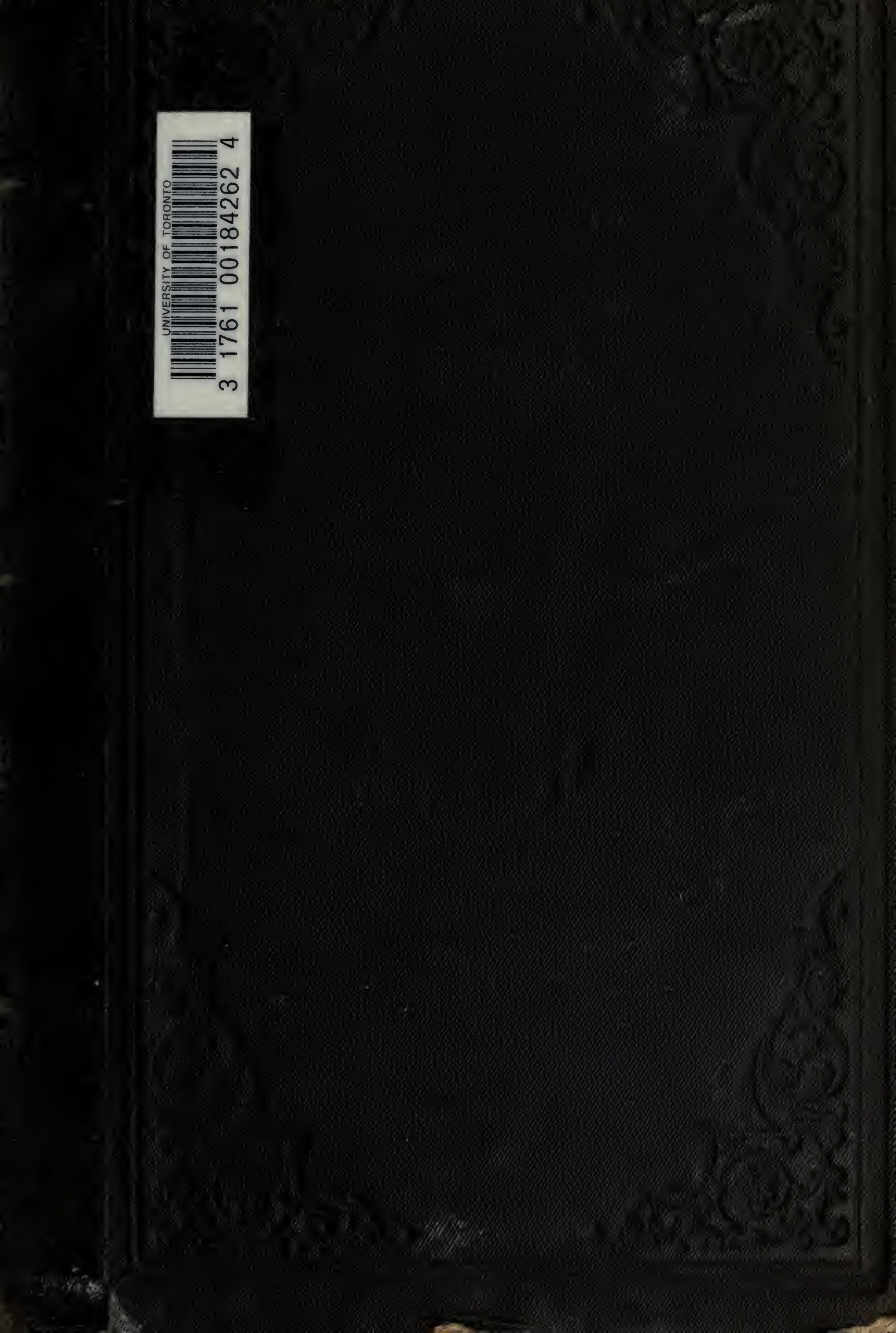
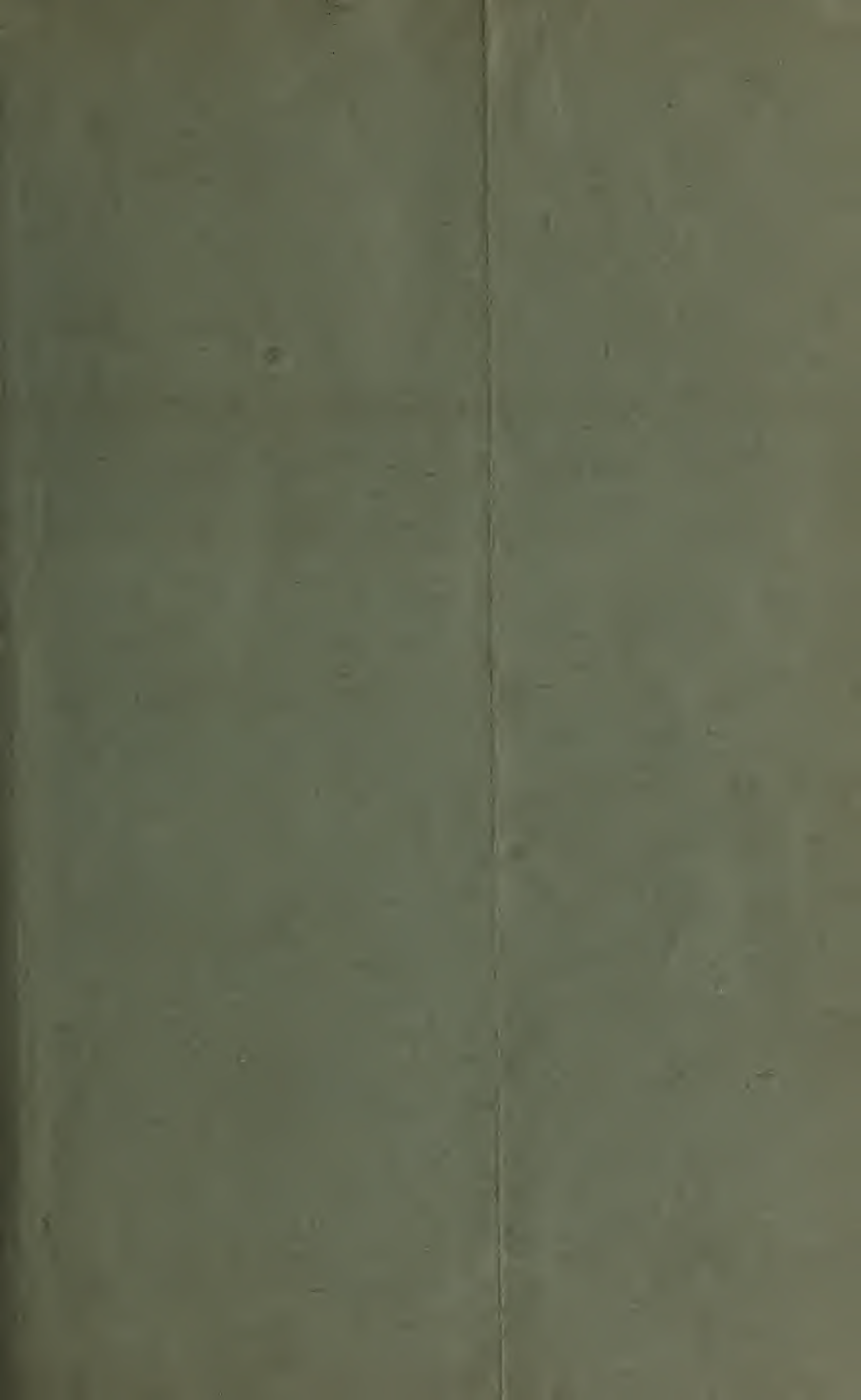

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00184262 4







TRAITÉ

DU

QUADRILATÈRE

ATTRIBUÉ A NASSIRUDDIN-EL-TOUSSY.

D'APRÈS UN MANUSCRIT TIRÉ DE LA BIBLIOTHÈQUE

DE

S. A. EDHEM PACHA

ANCIEN GRAND-VISIR

TRADUIT PAR

ALEXANDRE PACHA CARATHEODORY

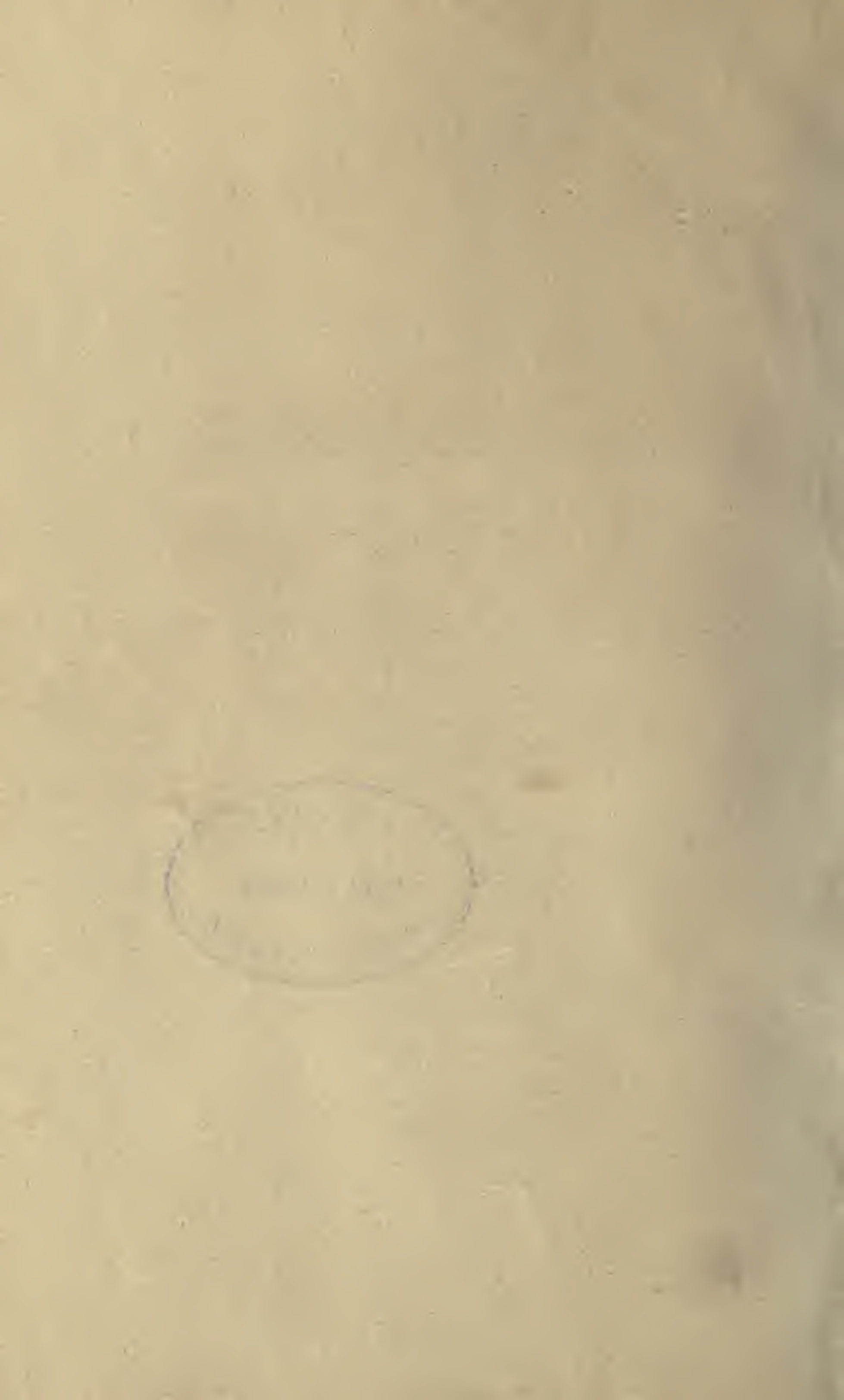
ANCIEN MINISTRE DES AFFAIRES ETRANGÈRES.

PAR AUTORISATION DE MINISTÈRE IMPÉRIAL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

CONSTANTINOPLE

Typographie et Lithographie Osmanié.

1891



AU NOM DE DIEU
CLÉMENT ET MISÉRICORDIEUX.

JE N'AI D'APPUI QU'EN DIEU. EN LUI J'AI PLACÉ MON DÉVOUMENT.

Louange à Dieu qui en créant des vérités infinies multiplie le bien. C'est Lui qui a déposé des secrets sublimes en des choses subtiles (1). — Je Le loue pour la révélation de l'inconnu et la permutation de la difficulté en facilité et j'invoque les bénédictions sur Son Prophète de haute mémoire et sur les membres de Sa famille, les vertueux, les pieux.

J'avais composé, il y a quelques années, un traité comprenant toute la discussion de la figure connue sous le nom de *quadrilatère complet* (2) avec les démonstrations, et j'y avais annexé ce *qui en tient lieu* (3) et s'y rapporte. Mais comme ce traité avait été écrit en Persan et que quelques amis qui s'intéressent à la science (4) ont demandé qu'il fût traduit en Arabe, je me suis rendu à leur désir et après en avoir supprimé quelques parties qui ne présentaient rien d'essentiel, je me mis à l'œuvre en implorant le secours du Très-Haut le meilleur des auxiliaires.

Ce Traité est divisé en cinq livres chacun desquels comprend plusieurs propositions et chapitres ainsi qu'il suit :

Livre I. Des rapports composés et de leurs règles en quatorze propositions.

Livre II. De la figure du *quadrilatère* plan et des rapports qu'on y trouve en onze chapitres.

Livre III. Introduction à la théorie du *quadrilatère* sphérique et de ce qui complète l'utilité qu'on peut retirer de cette figure, en trois chapitres.

Livre IV. Du *quadrilatère* sphérique et des rapports, qu'on y trouve, en cinq chapitres.

Livre V. Exposé des procédés qui tiennent lieu de la théorie du *quadrilatère*, pour ce qui est de la connaissance des arcs de grands cercles, en sept chapitres.

LIVRE I.

DES RAPPORTS COMPOSÉS

ET DE LEURS RÈGLES EN QUATORZE PROPOSITIONS.

RÈGLE GÉNÉRALE.

De même que pour donner exactement la mesure de la quantité discontinue on fait usage de certaines propriétés essentielles à la grandeur continue, telle que la divisibilité à l'infini, de même aussi dans la mesure de la grandeur continue on fait intervenir certaines propriétés essentielles à la quantité discontinue. Telle est la supposition d'après laquelle la grandeur continue se compose d'unités discrètes ou discontinues que l'on imagine afin de parvenir à la mesure de la grandeur continue. L'examen de ce que l'une de ces deux études emprunte à l'autre ne rentre pas dans notre sujet.

AVERTISSEMENT

Sur ce que l'on doit entendre par composition et par décomposition de rapports.

On lit au début du Livre VI des Eléments d'Euclide que l'on dit d'un rapport qu'il est composé d'autres rapports quand les quotités de ces rapports étant répétées les unes par les autres, il résulte un certain rapport; et l'on dit des rapports qu'ils sont décomposés en d'autres rapports, quand ces rapports sont partagés les uns par les

autres de manière à former certains autres rapports (5).

Ayant ainsi posé ces règles, je dis maintenant que :

PROPOSITION PREMIÈRE.

Étant données trois quantités homogènes, le rapport d'une quelconque de ces trois quantités à une seconde est composé du rapport de la première à la troisième et de celui de cette troisième à la seconde.

Soient trois quantités homogènes A, B, C, je dis que
$\frac{A}{B}=\frac{A}{C}\times\frac{C}{B}$; $\frac{A}{C}=\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}$; $\frac{B}{C}=\frac{B}{A}\times\frac{A}{C}$, etc. (6).

Il suffira de démontrer l'exactitude du premier de ces rapports pour conclure à l'exactitude de tous les autres.

Démonstration. Supposons qu'une unité mesure ces quantités et que cette unité
mesure D comme A mesure C; *(c. a. d. faisons* $\frac{1}{D}=\frac{A}{C}$ *etc.)*
mesure T comme C mesure B:
mesure H comme A mesure B;
D sera alors la *quantité* du rapport $\frac{A}{C}$;
T sera alors la *quantité* du rapport $\frac{C}{B}$;
H sera alors la *quantité* du rapport $\frac{A}{B}$;
par la raison que tout rapport a *même nom* (7) avec le nombre que l'unité mesure de la même manière dont le premier terme du rapport mesure le second et que le nombre qui a *même nom* que le rapport, en est la quantité même. Or, nous avons dit que la composition d'un rapport par un autre est la répétition de la valeur de l'un par la valeur de l'autre. Mais la répétition d'un nombre par un autre n'est que la multiplication de l'un de ces nombres par l'autre; donc H est aussi le produit même de la multiplication de D par T. En effet, A : C : : 1 : D ; et inversement C : A : : D : 1; mais A : B : : 1 : H; d'où par la *proportion ordonnée* (8), on tire C : B : : D : H, et comme C : B : : 1 : T, on a 1 : T : : D : H, ce qui donne enfin $T\times D=H\times 1$. Or le produit de tout nombre par l'unité est ce nombre même; donc $H=T\times D$, soit $\frac{A}{B}=\frac{A}{C}\times\frac{C}{B}$, c. q. f. d. (9).

PROPOSITION II.

Réciproquement. étant données trois quantités homogènes, si l'on compose le rapport d'une première quelconque de ces quantités à une seconde, avec celui de cette seconde à la troisième, on a comme résultat le rapport de la première à la troisième.

Soient les trois quantités A, B, C. — Si, A : B :: 1 : D; B : C :: 1 : T; et $D \times T = H$; je dis que H est la *quantité* du rapport $\frac{A}{C}$.

Démonstration. De ce que $D \times 1 = D$; et $D \times T = H$; on a aussi : Rectangle D : Rectangle H :: 1 : T. Mais 1 : T :: B : C; donc D : H :: B : C; et comme 1 : D :: A : B, on aura par la *proportion ordonnée*, 1 : H :: A : C; ce qui prouve que H, le produit de la multiplication de D par T, est aussi la quantité du rapport $\frac{A}{C}$; c. q. f. d.

Autrement. D est la quantité du rapport $\frac{A}{B}$,
T est la quantité du rapport $\frac{B}{C}$
et $D \times T = H$. Or on sait que l'unité mesure le multiplicateur comme le multiplicande mesure le produit; donc $\frac{D}{1} = \frac{H}{T}$ mais $\frac{D}{1} = \frac{B}{A}$, et T : H :: A : B; d'autre part 1 : T :: B : C; d'où par la proportion *troublée*: 1 : H :: A : C. Ainsi H est la quantité même du rapport $\frac{A}{C}$, et il est aussi le produit de D par T, c. à. d. le produit de $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C}$; donc ce dernier produit aussi est égal à $\frac{A}{C}$, c. q. f. d.

PROPOSITION III.

Ce qui précède est encore vrai s'agissant de plus de trois quantités.

Soient quatre quantités homogènes A, B, C, D; je dis que le rapport $\frac{A}{D}$ est composé des rapports $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$, $\frac{C}{D}$.

Démonstration. Il a été établi plus haut que $\frac{A}{C} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C}$ Mais A, C, D, aussi étant trois quantités homogènes, on aura $\frac{A}{D} = \frac{A}{C} \times \frac{C}{D}$, et comme $\frac{A}{C} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C}$, on aura $\frac{A}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \times \frac{C}{D}$.

Il en sera de même pour le cas inverse.

Observez que le nombre des rapports ainsi formés avec un certain nombre de quantités, est toujours inférieur d'une unité au nombre des quantités qui en constituent les termes, pourvu que ces quantités soient communes. *(que le conséquent de l'un serve d'antécédent à un autre).*

En cas d'égalité des rapports on est dans l'habitude de dire que le rapport du premier (*terme*) au dernier est égal au rapport du premier au second *ter*, *quater* etc.

PROPOSITION IV.

Si un rapport est composé d'autres rapports, tout rapport qui lui est égal est composé de rapports égaux à ces premiers rapports en nombre et en quantité.

Soit le rapport $\frac{A}{B}$ composé du rapport $\frac{A}{C}$ et du rapport $\frac{C}{B}$; et soit $\frac{F}{D}=\frac{A}{B}$; je dis que le rapport $\frac{F}{D}$ sera également composé de deux rapports égaux aux deux rapports précédents.

Démonstration. Soit $\frac{A}{C}=\frac{F}{E}$, on aura C:A::E;F; et de ce que $\frac{A}{B}=\frac{F}{D}$, ou aura aussi A:B::F:D, et par la proportion *ordonnée* C: B::E: D. Mais $\frac{F}{E}=\frac{A}{C}$ et $\frac{E}{D}=\frac{C}{B}$; donc $\frac{F}{D}=\frac{F}{E}\times\frac{E}{D}$; c. à. d. que le rapport $\frac{F}{D}$ est composé de deux rapports égaux aux deux rapports primitifs c. q. f. d.

Avec le même raisonnement et la même figure on prouvera que quand un rapport est égal à un autre rapport composé de deux rapports, si nous avons une quantité intermédiaire entre les deux termes du premier rapport, et telle que le rapport de l'un des deux termes à cette quantité soit égal à l'un de ces deux rapports, dans ce cas, le rapport de cette quantité à l'autre terme sera égal à l'autre de ces deux rapports. — Ainsi si $\frac{F}{D}=\frac{A}{B}$, lequel $\frac{A}{B}$ est composé de $\frac{A}{C}$ et de $\frac{C}{B}$, et si E est une quantité intermédiaire entre F et D, telle que $\frac{F}{E}=\frac{A}{C}$, dans ce cas, $\frac{E}{D}$ aussi sera égal à $\frac{C}{B}$. Et c'est là ce qu'on entend par partager le

rapport $\frac{F}{D}$ en deux autres rapports, tels que ceux que nous venons de déterminer. En effet, on ne saurait concevoir qu'un rapport est diminué d'un autre qu'après qu'on aura partagé le rapport à diminuer en deux autres: le rapport au moyen duquel on se propose de faire cette opération et le rapport restant. Ainsi pour tirer du rapport $\frac{F}{D}$, le rapport $\frac{A}{C}$, nous partageons le rapport $\frac{F}{D}$, en rapport $\frac{F}{E}$, l'égal de $\frac{A}{C}$, et en rapport $\frac{E}{D}$, l'égal de $\frac{C}{B}$, de manière qu'après avoir tiré $\frac{F}{E}$ de $\frac{F}{D}$, il nous en reste $\frac{E}{D}$; c'est là ce qu'on appelle aussi *ôter* un rapport d'un autre. (10).

PROPOSITION V.

Si un rapport est composé d'autres rapports, il est également composé de tous autres rapports égaux aux premièrs, lors même que les termes de ces rapports seraient différents.

Soient $\frac{A}{B} = \frac{A}{C} \times \frac{C}{B}$; $\frac{E}{D} = \frac{A}{C}$; $\frac{F}{H} = \frac{C}{B}$. —

Je dis que $\frac{A}{B}$ est composé des rapports $\frac{E}{D}$ et $\frac{F}{H}$.

Démonstration. Désignons par T le Rectangle $E \times F$.

" par K le Rectangle $D \times H$.

" par L le Rectangle $D \times F$.

Il est établi dans le Livre des Éléments (11), que:

Rectangle T : Rectangle $K = \frac{E}{D} \times \frac{F}{H}$. (a)

Rectangle T : Rectangle L :: E : D :: A : C. (b)

Rectangle L : Rectangle K :: F : H :: C : B. (c)

De (b) et (c) on tire par la proportion ordonnée:

Rect. T : Rect. K :: A : B et comme on a aussi (a)

Rect. T : Rect. K. $= \frac{E}{D} \times \frac{F}{H}$, il devient évident que $\frac{A}{B}$ est composé de ces mêmes rapports. c. q. f. d.

PROPOSITION VI.

Si un rapport est composé d'autres rapports pris dans un certain ordre, il sera égal à tout autre rapport composé des mêmes rapports pris dans un ordre quelconque.

Soit le rapport $\frac{A}{B}$ composé des rapports $\frac{D}{E}$ et $\frac{F}{G}$ pris dans cet ordre; et soit le rapport $\frac{T}{U}$ composé des deux rapports $\frac{F}{G}$ et $\frac{D}{E}$ pris dans cet ordre, je dis que les rapports $\frac{A}{B}$, $\frac{T}{U}$ sont égaux.

Démonstration. Faites $\frac{A}{L} = \frac{D}{E}$. et $\frac{L}{B} = \frac{F}{G}$; et aussi $\frac{M}{U} = \frac{D}{E}$ et $\frac{T}{M} = \frac{F}{G}$. Alors $\frac{A}{L} = \frac{M}{U}$, $\frac{L}{B} = \frac{T}{M}$. Ce qui donne les propositions A : L :: M : U.

L : B :: T : M.

desquelles par la *proportion troublée* on tirera A : B :: T : U. c. q. f. d.

Autrement. Multipliez $\frac{D}{E}$ par $\frac{F}{G}$, et $\frac{F}{G}$ par $\frac{D}{E}$; les deux résultats devront être égaux, puisque le rectangle du multiplicande par le multiplicateur doit être égal au rectangle du multiplicateur par le multiplicande. Donc $\frac{A}{B} = \frac{T}{U}$. c. q. f. d.

PROPOSITION VII.

Si un rapport est composé de deux rapports, l'inverse de ce rapport sera composé de ces mêmes rapports renversés.

Soit le rapport $\frac{A}{B}$ composé des rapports $\frac{C}{D}$ et $\frac{E}{F}$; je dis que le rapport $\frac{B}{A}$ sera composés des rapports $\frac{D}{C}$ et $\frac{F}{E}$.

Démonstration. Soit rapport $\frac{A}{H} = \frac{C}{D}$; il faudra dans ce cas que $\frac{H}{B}$ soit égal à $\frac{E}{F}$, et le rapport $\frac{B}{A}$ demeure composé de $\frac{B}{H}$ l'égal de $\frac{F}{E}$ et de $\frac{H}{A}$ l'égal de $\frac{D}{C}$. c. q. f. d.

PROPOSITION VIII.

Tout rapport composé de deux rapports est aussi composé du rapport de l'antécédent du premier au conséquent du second et de celui de l'antécédent du second au conséquent du premier.

Soit $\frac{A}{B}$ composé de $\frac{C}{E}$ et $\frac{D}{F}$, je dis que ce rapport est également composé de $\frac{C}{F}$ et de $\frac{D}{E}$.

Démonstration. Soient: H = Rect. D $\times$ F.
T = Rect. E $\times$ F.
K = Rect. E $\times$ D.
L = Rect. D $\times$ F.

dans ces hypothèses le rapport $\frac{H}{T}$ pourra être considéré comme composé soit de $\frac{H}{K}$ l'égal de $\frac{C}{E}$ et de $\frac{K}{T}$ l'égal de $\frac{D}{F}$; soit de $\frac{H}{L}$ $\left(\frac{C}{D} \times \frac{D}{F} = \frac{C}{F}\right)$ et de $\frac{L}{T}$ $\left(\frac{D}{E} \times \frac{F}{F} =\right) \frac{D}{E}$; d'où $\frac{H}{T} = \frac{C}{E} \times \frac{D}{F} = \frac{A}{B} = \frac{C}{F} \times \frac{D}{E}$. c. q. f. d.

PROPOSITION IX.

Le solide formé par la multiplication de l'antécédent d'un rapport composé par les deux conséquents des deux rapports simples *(composants)* est égal au solide résultant de la multiplication du conséquent de ce même rapport par les deux antécédents de ces mêmes rapports.

Soit le rapport $\frac{A}{B}$ composé des deux rapports $\frac{C}{E}$ et $\frac{D}{F}$ je dis que Solide $A \times E \times F =$ Solide $B \times C \times D$.

Démonstration. Soit, Rect. $T = C \times D$ et Rect. $K = E \times F$ Alors le rapport $\frac{T}{K} =$ rapport $\frac{A}{B}$, et les quatre quantités A, B, T, K, seront proportionnelles. $A \times K$ sera donc égal à $B \times T$. Mais $K = E \times F$, et $A \times K = A \times E \times F$; de même $T = C \times D$, et $B \times T = B \times C \times D$; les deux Solides seront par conséquent égaux. c. q. f. d.

On a l'habitude de ranger les quantités et les rapports qui entrent dans un rapport composé de deux rapports en tableau comme ci-dessous:

B		A
	E	C
F	D	

On donne aux côtés du premier solide A, E, F, le nom de quantités du 1[er] membre (13) et on les place sur la diagonale, pendant que l'on désigne les trois autres quantités B, C, D sous le nom de quantités du 2[ème] membre. A, est l'antécédent du rapport composé; B, en est le conséquent; C est l'antécédent du 1[er] rapport; E, son conséquent; et de même que, étant données quatre quantités proportionnelles, on trouve l'inconnue au moyen de la multi-

plication et de la division et aussi au moyen du rapport, en se servant convenablement des trois connues, de même ici aussi nous trouvons à l'aide des cinq connues la sixième inconnue.

On y arrive par deux méthodes; la méthode composée et la méthode simple.

Méthode composée. Après avoir déterminé si le terme inconnu fait partie du 1^er^ ou du 2^ème^ membre, on divise le solide du membre tout connu par le rectangle des deux termes connus du 2^ème^ membre; le quotient sera l'inconnue cherchée ainsi que cela devient évident par le théorème précédent.

Méthode simple. On peut s'en servir de deux manières. 1° Si l'on connaît à quel terme des trois rapports correspond l'inconnue, on effectuera les divisions des deux autres rapports terme à terme afin d'en obtenir les valeurs, et si l'inconnue appartient au rapport composé on prendra le rectangle des deux valeurs, comme valeur du rapport composé; que si l'inconnue fait partie de l'un des rapports simples *(composants)*, on divisera la valeur du rapport composé par la valeur du rapport composant qui est connu et le quotient formera la valeur de l'autre rapport composant. Lorsqu'on aura ainsi obtenu la valeur de ce rapport, le rapport de l'unité à cette valeur sera comme le rapport de la quantité qui correspond à l'unité — d'entre les deux termes du rapport auquel appartient l'inconnue— à l'autre terme (14). Ainsi si l'inconnue est A *(en prenant comme forme normale du rapport la relation* $\frac{A}{B}=\frac{C}{E}\times\frac{D}{F}$ *)* divisez E par C; cela vous donnera G, lequel G sera la *quantité* du 1^er^ rapport; divisez F par D; cela vous donnera H, lequel H sera la quantité du 2^ème^ rapport; faites-en le rectangle et soit T ce rectangle; T alors sera la quantité du rapport $\frac{A}{B}$, et le correspondant de B, tandis que l'unité sera le terme correspondant à A, (c. à. d. A: B:: 1: T),

d'où divisant B par T, vous obtiendrez la quantité cherchée A. Ce procédé, comme on voit, consiste en deux multiplications et deux divisions, ou bien en trois divisions et une multiplication, et le tout revient à chercher une quatrième proportionnelle; car on a constamment dans une multiplication, l'unité au multiplicateur comme le multiplicande est au produit, de même que dans la division l'unité est au quotient comme le diviseur est au dividende. Si vous divisez C par E et R par F, l'unité devient le correspondant de B, dans le rapport composé. Ce qui donne lieu aux deux tableaux suivants: (15).

I.		II.	
Rapport composé		**Rapport composé**	
A	B	A	B
1	T	T	1
Premier rapport		**Premier rapport**	
C	E	C	E
1	G	G	1
Second rapport		**Second rapport**	
D	F	D	F
1	H	H	1

2° Dans cette autre manière d'opérer on peut adopter l'un des trois procedés suivants:

a) On cherche une quantité intermédiaire entre les deux termes du rapport composé, et telle que le rapport de l'un des deux termes à cette quantité soit égal à l'un des deux rapports composants et que celui de l'autre terme à cette même quantité soit égal à l'autre rapport composant. A cet effet on procèdera comme pour la détermination d'une quatrième proportionelle, le rapport de la quantité intermédiaire au terme connu du rapport composé étant égal au rapport de l'un des deux termes du rapport composant connu à l'autre.

Reprenons le rectangle des six quantités.

B	I	A
	E	C
F	D	

Si p. e. l'inconnue est A, on aura le rapport de I (la quantité intermédiaire entre A et B) à B comme D à F; alors à l'aide des quantités B, D, F, on obtient I. Si, c'est D qui est l'inconnue, alors le rapport de A à I sera égal à celui de C à E, et l'on trouvera I, à l'aide des quantités A, C, E. Il en sera de même dans les autres cas pour lesquels on aura toujours deux multiplications et deux divisions, ainsi que cela ressort du tableau suivant. (16)

A

Les inconnues	Multipliez	Par	Divisez par	Vous aurez	Après multipliez	Par	Divisez par	Vous aurez
A	B	D	F	I	I	C	E	A
B	A	E	C	I	I	F	D	B
C	B	D	F	I	A	E	I	C
E	B	D	F	I	I	C	A	E
D	A	E	C	I	I	F	B	D
F	A	E	C	I	B	D	I	F

Que si l'on n'exécutait pas les deux multiplications et les deux divisions dans l'ordre indiqué dans le tableau, on pourra diversifier les manières d'arriver à ce résultat. (17)

b) On cherche une troisième quantité qui fasse suite aux deux termes du 1[er] rapport, et telle que le rapport du con-

séquent de ce rapport à cette quantité soit comme celui de l'antécédent du 2^me^ rapport à son conséquent. On retombe ainsi dans ce qui a été exposé.

c) On cherche une quantité qui mise en avant des termes du 2^me^ rapport soit telle que le rapport de cette quantité à l'antécédent du 2^ème^ rapport soit comme le rapport de l'antécédent du 1^er^ rapport à son conséquent. On retombe ainsi dans ce qui a été exposé.

Les techniciens ont rédigé à ce sujet deux autres tableaux que nous donnons ci-après. Ce que nous en avons dit suffira pour tout esprit sagace.

B

Inconnues	Multipliez	Par	Divisez par	Multipliez par	Divisez par
A	C	D	F	B	E
B	E	F	D	A	C
C	A	F	B	E	D
E	B	D	A	C	F
D	A	E	B	F	C
F	B	C	A	D	E

(18)

C

Inconnues	Multipliez	Par	Divisez par	Multipliez par	Divisez par
A	B	C	E	D	F
B	A	E	C	F	D
C	A	F	D	E	B
E	B	D	F	C	A
D	A	E	C	F	B
F	B	C	E	D	A

PROPOSITION X.

Etant donné un rapport composé de deux autres rapports, chacune des quantités qui font partie de l'un des membres est à une quelconque des quantités qui entrent dans l'autre membre en rapport composé de deux rapports des quatre quantités qui restent sur les six, à la condition

que leurs antécédants soient pris dans le membre auquel appartient le conséquent du second rapport composé, tandis que leurs conséquents seront pris dans le membre auquel appartient l'antécédent de ce même rapport.

Ainsi étant donné le rapport $\frac{A}{B} = \frac{C}{E} \times \frac{D}{F}$, je dis que le rapport de l'une quelconque des trois quantités A, E, F, à une quelconque des quantités B, C, D, que p. e. le rapport $\frac{A}{C}$, sera composé de deux rapports des quatre quantités restant, et dont les antécédents étant pris dans le membre auquel appartinnt C (c. à. d. étant B, D), les conséquents seront pris dans le membre auquel appartient A. (c. à d. seront E, F).

Démonstration. Soit A la hauteur du solide $A \times E \times F$; C celle du solide $B \times C \times D$; A cera à C, dans le rapport inverse du rectangle $B \times D$, (base du solide $B \times C \times D$) au rectangle $E \times F$, (base du solide $A \times E \times F$), ainsi que cela est établi dans les proposition 4[me] et 5[me] après la 30[me] du Livre XI des Eléments d'Euclide. Mais le rapport des rectangles $B \times D$ et $E \times F$ est composé du rapport de ces mêmes côtés, c. à. d. du rapport de B à F et du rapport de D à E. Donc aussi le rapport des deux hauteurs A et C est composé de l'un des deux systèmes précédents c. q. f. d.

Il en sera de même des autres cas.

Comme chaque membre est composé de trois quantités, la comparaison de chacnne des trois quantités de l'un des deux membres aux trois quantités de l'autre membre donne lieu à 9 rapports; et comme chacun de ces 9 rapports est composé des deux rapports formés des quatre quantités restant, il en résulte que le nombre des manières dont ces rapports peuvent être exprimés s'élève au double, c. à. d. à 18. En outre, comme les antécédents peuvent être pris aussi bien dans le 1[er] membre que dans le second, nous arrivons à 36 expressions dont la moitié est l'inverse de l'autre moitié et dont chacune peut devenir la source des 35 autres.

C'est ce que nous avons voulu indiquer dans le tableau ci-joint.

D

Nombres	Rapport composé		Rapports simples qui en dérivent				Nombres	Rapport composé		Rapports simples qui en dérivent			
			Premier rapport		Second rapport					Premier rapport		Second rapport	
	Antécédent	Conséquent	Antécédent	Conséquent	Antécédent	Conséquent		Antécédent	Conséquent	Antécédent	Conséquent	Antécédent	Conséquent
1	A	B	C	E	D	F	1	B	A	E	C	F	D
2	A	B	C	F	D	E	2	B	A	E	D	F	C
3	A	C	B	E	D	F	3	B	E	A	C	F	D
4	A	C	B	F	D	E	4	B	E	A	D	F	C
5	A	D	B	E	C	F	5	B	F	A	C	E	D
6	A	D	B	F	C	E	6	B	F	A	D	E	C
7	E	B	C	A	D	F	7	C	A	E	B	F	D
8	E	B	C	F	D	A	8	C	A	E	D	F	B
9	E	C	B	A	D	F	9	C	E	A	B	F	D
10	E	C	B	F	D	A	10	C	E	A	D	F	B
11	E	D	B	A	C	E	11	C	F	A	B	E	D
12	E	D	B	F	C	A	12	C	F	A	D	E	B
13	F	B	C	A	D	E	13	D	A	E	B	F	C
14	F	B	C	E	D	A	14	D	A	E	C	F	B
15	F	C	B	A	D	E	15	D	E	A	B	F	C
16	F	C	B	E	D	A	16	D	E	A	C	F	B
17	F	D	C	E	B	A	17	D	F	C	C	A	B
18	F	D	C	A	B	E	18	D	F	E	B	A	C

Que si l'on s'attachait à l'ordre des rapports composants selon que l'un de ces rapports occuperait la 1ère place ou la seconde le nombre de ces expressions des rapports dérivés s'élèverait au double soit à 72. (19)

PROPOSITION XI.

Si dans un rapport composé de deux rapports une des trois quantités du 1er membre est égale à une des trois quantités de l'autre membre, les quatre quantités restant seront nécessairement proportionelles à la condition qu'il y aura un antécédent et un conséquent pris dans chaque membre c. à d. que la proportion sera inverse.

Ainsi si le rapport $\frac{A}{B}$ est composé des rapports $\frac{C}{E}$ et $\frac{D}{F}$ et si A qui fait partie du 1er membre est égal à C qui fait partie du 2nd je dis que les quatre quantités B, E, D, F, seront inversement proportionnelles, de manière que si l'un des deux antécédents est une des deux quantités B, D, qui appartiennent toutes les deux au 2nd membre son conséquent sera pris dans le 1er membre, que l'autre antécédent sera une des quantités E, F, du 1er membre avec un conséquent pris dans le 2nd membre et qu'on aura;

B: E:: F: D

B: F:: E: D, et ainsi de suite

Démonstration. Il est établi dans la proposition 33me du Livre XI des Elémens (20), que deux solides de même hauteur sont entre eux comme leurs bases. Ici les solides représentés par les deux membres étant égaux et deux des quantités qui entrent dans chacun des deux membres étant aussi égales, si nous prenons ces deux quantités égales pour les hauteurs des deux solides, ceux-ci seront alors de même hauteur, le rapport de l'une des hauteurs à l'autre sera comme le rapport des deux bases, celles-ci seront égales, et les côtés de ces bases comme côtés de parallélogrammes équiangles seront entre eux réciproquement proportionnels. Il en sera par conséquent de même des quatre quantités restantes. c. q. f. d.

Par là il demeure aussi établi que tout rapport composé implique entre ses quatre quantités une proportion, qui peut prendre neuf formes résultant des différents arrangements qui se présentent entre les quantités de l'un des deux membres et celles de l'autre, ainsi que cela se voit dans le tableau ci-annexé.

E

Nombres	Quantités Égales		Les quatre quantités proportionnelles			
	du I^er membre	du 2^nd membre	I^er rapport de la proportion		Second rapport de la proportion	
			Antécédent	Conséquent	Antécédent	Conséquent
1	A	B	C	E	F	D
2	A	C	B	E	F	D
3	A	D	B	E	F	C
4	E	B	A	C	D	F
5	E	C	A	D	B	F
6	E	D	A	B	C	F
7	F	B	A	C	D	E
8	F	C	A	B	D	E
9	F	D	A	B	C	E

PROPOSITION XII.

Si deux des trois quantités appartenant au même membre sont égales entre elles, il n'y a pas nécessairement proportion entre les quatre autres.

C'est ce qui peut être prouvé aussi autrement. Reprenons l'exemple de tout à l'heure et posons E : I :: D : F, on aura par la proportion ordonnée C : I :: A : B. Mais A = C par hypothèse; I donc sera égal à B et I : E :: B : E. Mais nous avions I : E :: F : D, donc B : E :: F : D, c. q. f. d. (21)

B	T	A
I	E	C
F	D	H

De même en supposant B = E, posons F : D :: C : H, et C : E :: A : T. On aura A ; T :: C : E et T : B :: H : C, (22) lequel rapport $\frac{H}{C} = \frac{D}{F}$. D'où par la proportion troublée on obtient H ; E :: A ; B. Or à cause de B = E on aura A = H. Mais d'un autre côté H ; C ; ; D : F donc aussi A ; C ;: D ; F. c. q. f. d.

PROPOSITION XIII.

Tout rapport simple peut être considéré comme composé de deux rapports, l'un égal à ce rapport lui-même tandis que l'autre est un rapport d'identité.

B		A
E	D	C

Soit $\frac{A}{B}$ un rapport simple, je dis qu'il est composé de deux rapports tels que ceux dont nous venons de parler.

Démonstration. Soit C : E ;; A : B et soit D égal à E. Alors le rapport $\frac{C}{E}$ sera composé du rapport C à D, qui est égal au rapport $\frac{C}{E}$ et du rapport D à E qui sont deux quantités égales, et qui forment ce qu'on appelle un rapport d'identité. D'où l'on conclut que A à B est aussi composé de ces mêmes rapports. c. q. f. d.

Réciproquement, tout rapport composé d'un rapport quelconque et d'un rapport d'identité constitue virtuellement un rapport simple égal à ce même rapport composé. Ce que nous avons dit nous dispense de toute démonstration à ce sujet. On peut en conclure également que tout rapport d'identité est composé de deux rapports égaux à lui-même.

PROPOSITION XIV.

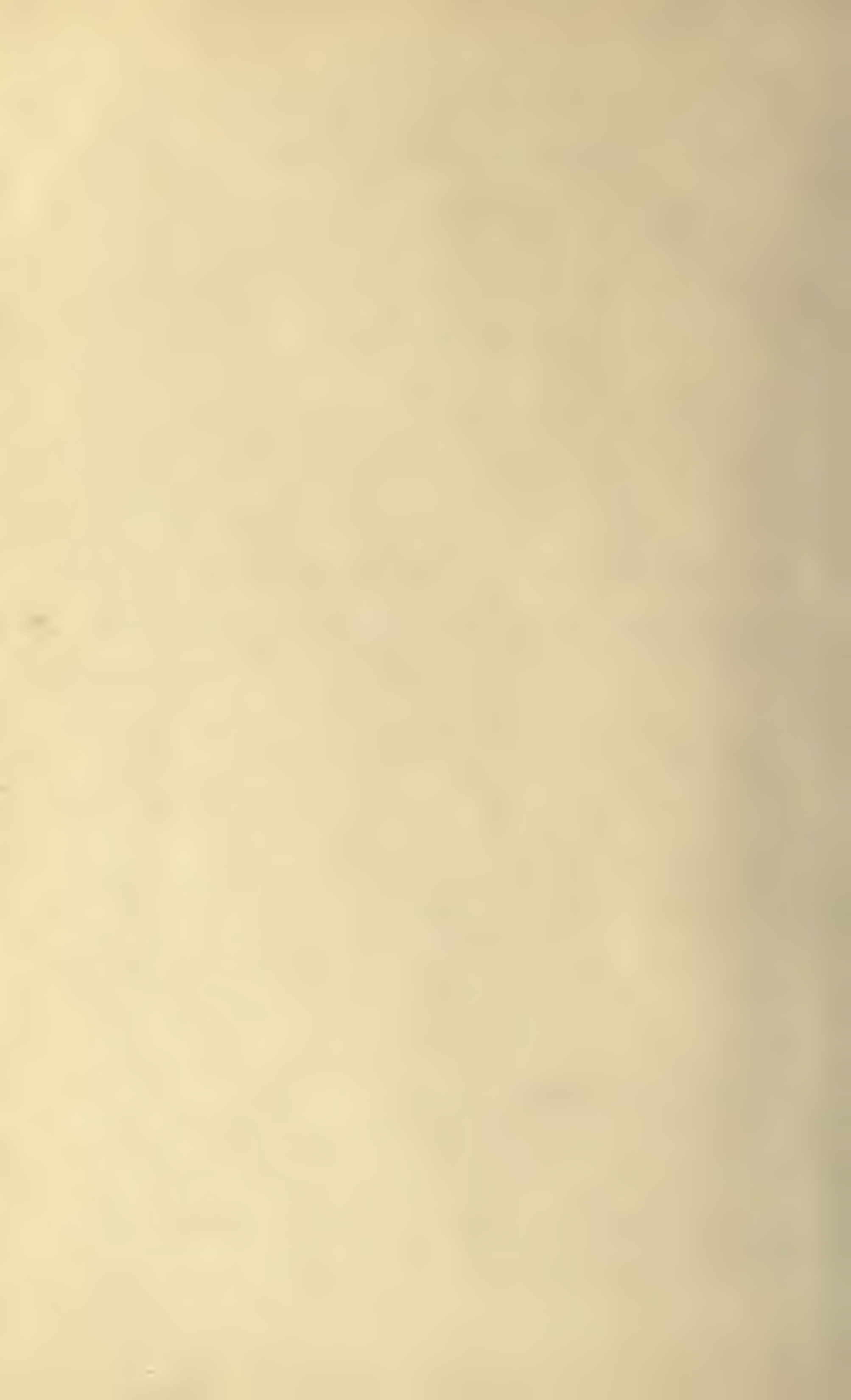
Tout rapport d'identité peut être considéré comme composé d'un rapport quelconque et de son inverse.

Soit $\frac{A}{B}$ un rapport d'identité, $\frac{C}{E}$ un rapport quelconque et $\frac{D}{F}$ un rapport analogue à $\frac{C}{F}$, je dis que $\frac{A}{B}$ est composé de deux rapports $\frac{C}{E}$ (et $\frac{D}{F}$) (23).

B		A
I	E	C
F	D	

Démonstration. Soit I une quantité égale à C; comme on a $\frac{C}{E} = \frac{F}{D}$, on aura aussi $\frac{E}{I}$ c. à. d. $\frac{E}{C}$ égal à $\frac{D}{F}$; ainsi $\frac{C}{I}$ rapport d'identité sera composé des rapports $\frac{C}{E}$ et $\frac{D}{F}$; par conséquent $\frac{A}{B}$ sera aussi composé de ces mêmes rapports c. à. d. d'un rapport quelconque et de son inverse. c. q. f. d.

Nous terminerons ici ce que nous avions à dire sur les rapports composés.



LIVRE II.

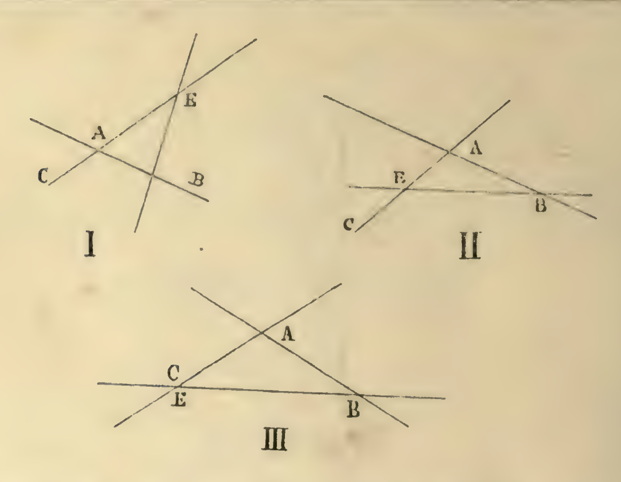
DE LA FIGURE DU QUADRILATÈRE COMPLET DANS LE PLAN ET DES RAPPORTS QU'ON Y TROUVE, (EN ONZE CHAPITRES).

CHAPITRE I.

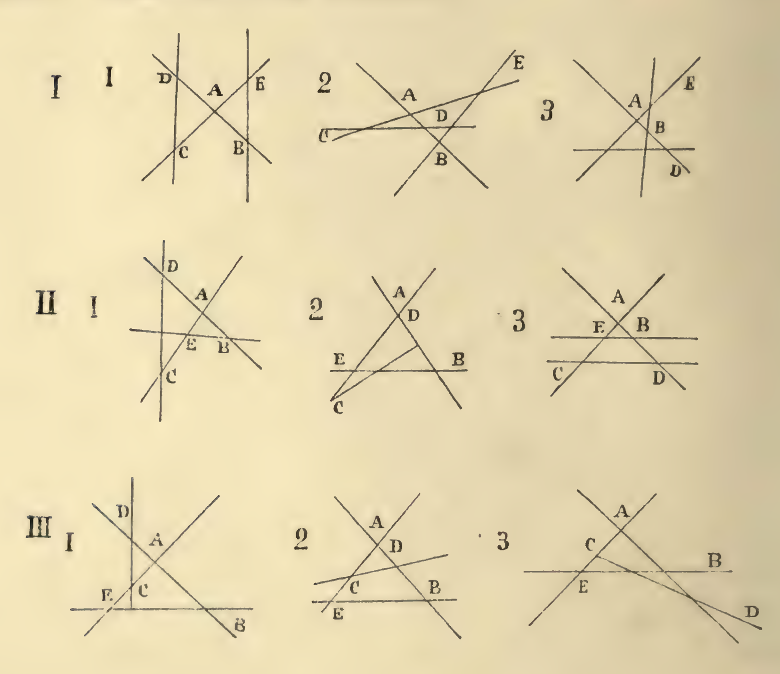
Eléments constitutifs du quadrilatère. Exposé succint de ses différentes formes et des rapports qui s'y rattachent.

Quatre droites qni se coupent deux à deux sans que plus de deux se rencontrent en un seul et même point, c'est ce qu'on appelle un quadrilatère plan, cette figure ne pouvant se présenter que sur un plan uni.

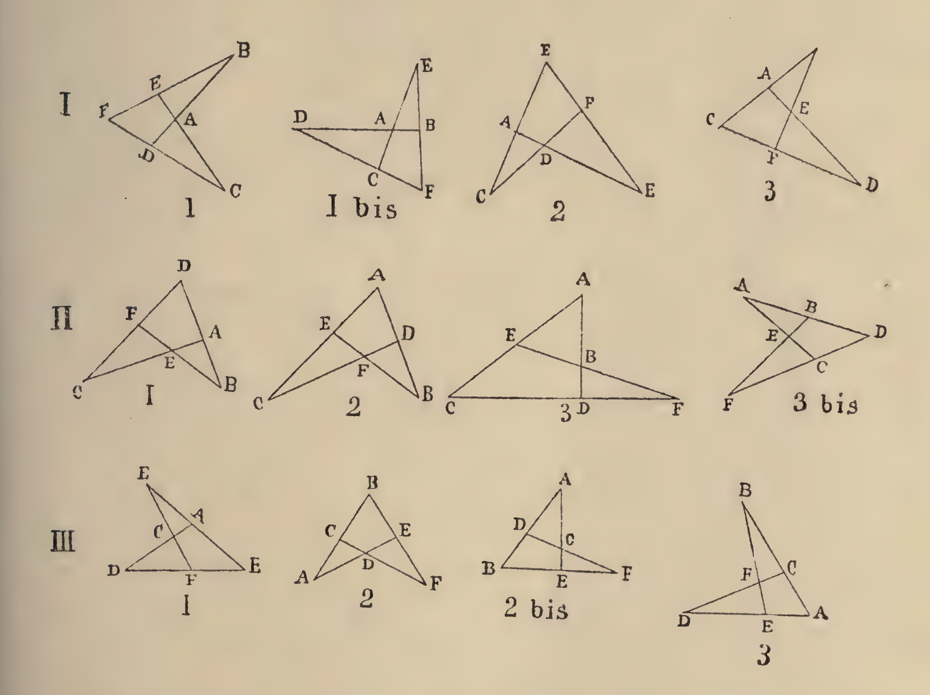
Les personnes qui possèdent cette science affirment que cette figure ne peut affecter que douze formes, pas une de plus, pas une de moins, et elles prouvent cette assertion en faisant remarquer que si deux droites AB, AC qui se coupent au point A, sont coupées par une troisième, qui coupera AB à un point autre que A, au point B par exemple et qui sera prolongée jusqu'à ce qu'elle coupe AC à un autre point que le point C, au point E, par exemple, ce point E tombera hors de la portion comprise entre A et C, du côté de A, ou bien entre A et C, ou bien enfin hors de ces points du côté de C, ce qui donne les trois figures suivantes:



Soit maintenant une quatrième ligne C D qui coupe ces trois lignes, la ligne AC en C; AB en D. Ce point D tombera hors de la portion AB du côté de A, ou entre A et B, ou bien hors de la portion AB du côté de B. Chacune des trois figures précédentes donnera ainsi naissance à trois autres les suivantes :



Dans ce qui précède nous nous sommes attachés aux insersections des droites AB, AC; AB, BE; AC, CD. Reste l'insersection F des droites BE, CD. Or, dans les fig. I. 1; II, 3; III. 2, on voit bien que selon que ce point F tombera du côté de B ou du côté de E, la figure sera modifiée; tandis que dans les autres cas, il ne peut tomber que d'un seul côté. Ainsi dans les figures I, 2, II, 2, III 1, le point F doit tomber entre les points B et E; et dans les figures I, 3; II, 1; III, 3, la droite CD, doit couper la droite B E, avant son intersection avec la ligne A B; d'où il résulte qu'en tenant compte du point F aussi on aura les douze figures suivantes:

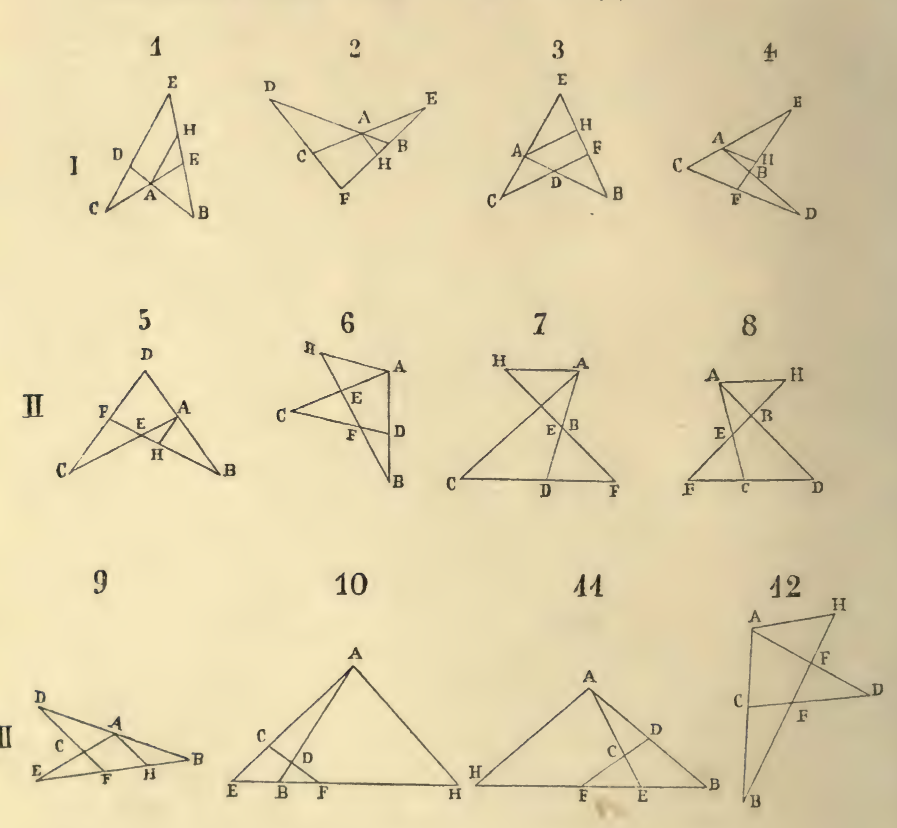


C'est cette dernière intersection qui semble avoir échappé à Houssam-Uddin-Ali-bni-Fazlullah le Salar.(1) malgré la supériorité dont il a fait preuve dans cette étude. Il n'admet que neuf figures dérivées. On prétend bien, dit-

il, qu'il y en a douze, mais pour ma part je ne les vois pas.

Les géomètres établissent souvent le rapport de ces douze figures au moyen d'une proposition et d'une démonstration unique qui s'applique à chacune d'elles, en disant que le rapport de la ligne AB à la ligne BD est composé du rapport de AE à EC et de celui de CF à FD.

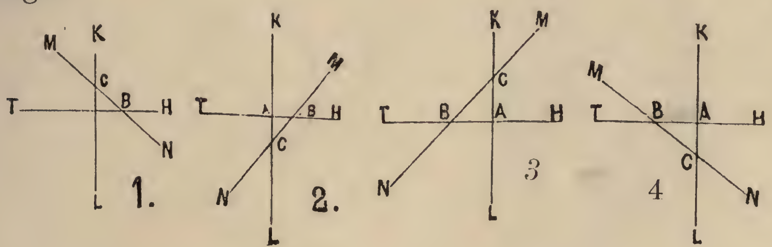
Démonstration Du point A tirez la ligne AH parallèle à CD jusqu'à ce qu'elle rencontre BE. Vous aurez AH : CF :: AE : EC à cause des triangles semblables EAH, ECF; et AH : FD :: AB : BD à cause des triangles semblables AFH, DBF. Mais $\frac{AH}{FD} = \frac{AE}{EC} \times \frac{CF}{DF}$ *(en remplaçant AH par sa valeur tirée de la 1ère proportion,)* donc aussi $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{EC} \times \frac{CF}{FE}$. c. q. f. d. (2)



Quant aux autres rapports existant entre les différentes parties de cette même figure, ils pourraient être également établis d'une manière générale.

Les géomètres disent encore que si tenant compte de ces formes ou porte à gauche ce qui est à droite et vice versa on obtient 24 figures qui ont communes entre elles toutes les propositions et toutes les démonstrations. Cependant je dirai, pour ma part, que si l'on tient compte des différents côtés, il est juste de prendre en considération les quatre parties comprises dans le plan et qui correspondent aux quatre côtés résultant de l'intersection à angles droits de deux droites indéfinies dans le plan (3). En réalité l'examen de ce point n'offre pas d'utilité et si nous l'entreprenons ici, malgré les longueurs qu'il entraîne, ce n'est que pour nous conformer à l'usage.

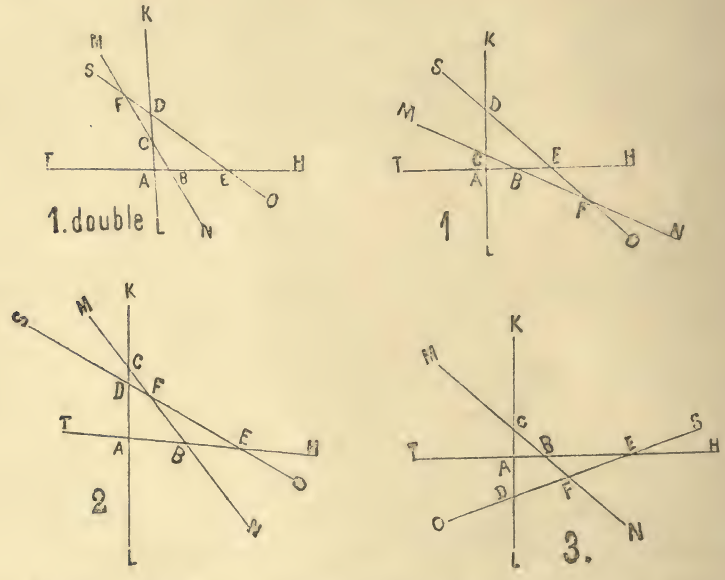
Si l'on suppose deux droites indéfinies HT, KL, qui se coupent à angles droits au point A, de manière à former les quatre côtés H,K,T,L, et une troisième ligne MN qui coupe HT en B et KL en C, on aura quatre triangles rectangles.



Dans chacune de ces figures chaque ligne se trouve partagée en trois portions: p. e. dans la fig. 1. HT=HB+BA+AT; KL= KC+CA+AL: MN=MC+CB+BN etc.

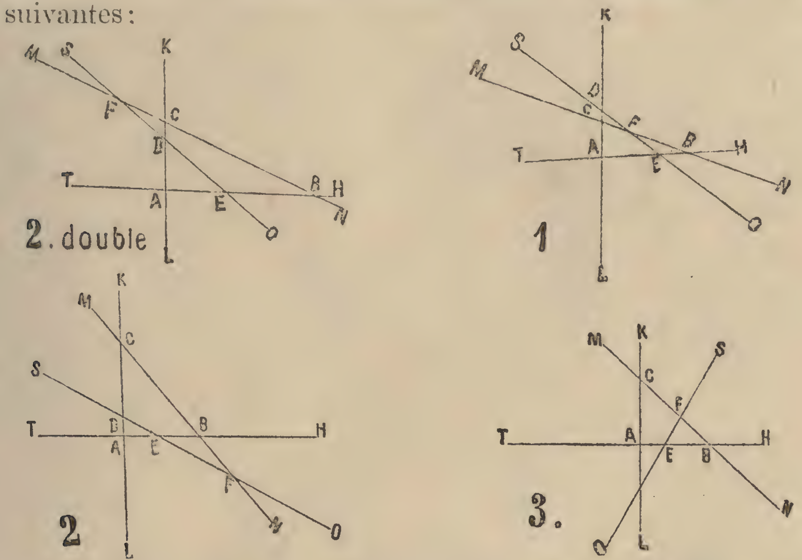
Supposons maintenant qu'une quatrième ligne, telle que la ligne SO, coupe la droite HT au point E, ce point E tombera nécessairement dans l'une des trois portions de la ligne HT que nous avons indiquées.

Soit cette portion l'espace compris entre B et H. La ligne SO coupera aussi la droite KL au point D, par exemple, qui tombera dans l'une des trois portions dans lesquelles KL est divisée; soit cette portion l'espace compris entre C et K. Enfin la ligne SO coupera aussi la droite MN au point F p. e. Mais ici ce point F peut aussi bien tomber dans la portion MC que dans la portion BN. De là ce que nous appellerons une double figure, le point D, tombant bien entendu dans chacune d'elles dans la portion KC. Que si ce point D tombe sur CA (droite KL), alors il faut nécessairement que MN soit coupée dans l'espace BC; comme aussi si le point D tombe dans la portion AL, il faut que MG soit coupée dans l'espace compris entre B et N. De sorte que le point E tombant dans la portion BH, on a les quatre figures suivantes:

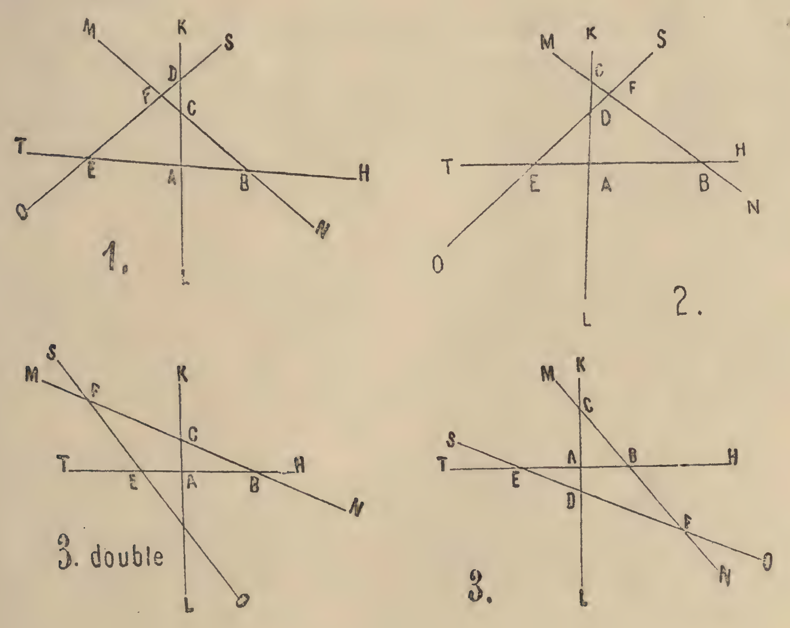


E tombe dans la portion AB de la droite HT; alors si D tombe en KC, F aussi tombera nécessairement en BC. Mais si D tombe en AC, F peut tomber aussi bien en CM qu'en BN, (figure double). Enfin si D tombe en

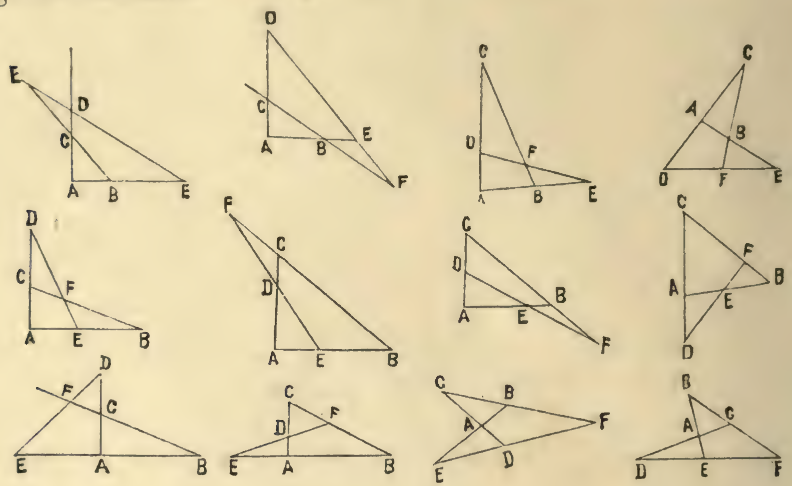
AL, F tombe en BC. On a ainsi quatre autres figures les suivantes :



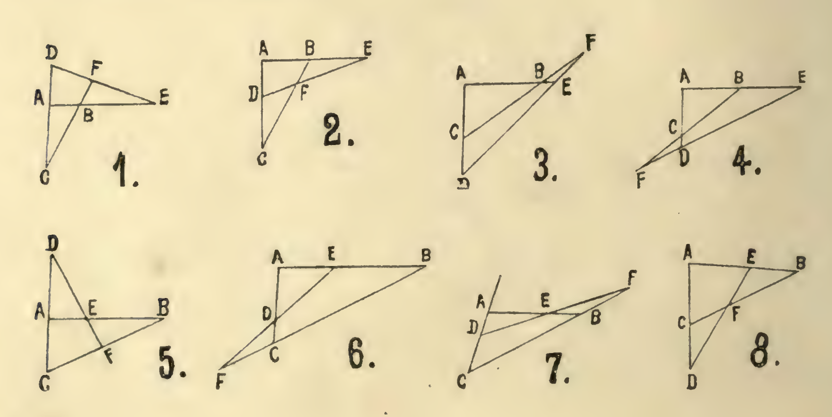
E, tombe dans la portion AT, de la droite HT ; alors si D tombe en KC, F tombera nécessairement en MC. Mais si D tombe en AL, F peut tomber aussi bien en CM qu'en BN (figure double) ; on a ainsi quatre autres figures les suivantes :

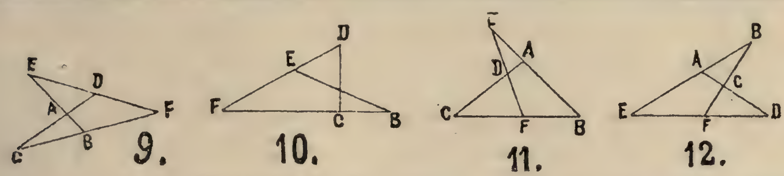


Telles sont les douze figures engendrées par les diverses intersections de la quatrième ligne avec les trois autres qui constituent la 1ère des quatre figures par lesquelles nous avons représenté plus haut les intersections des trois lignes seulement. Supprimant maintenant dans ces douze figures les lignes et les lettres inutiles nous obtenons les douze figures suivantes :

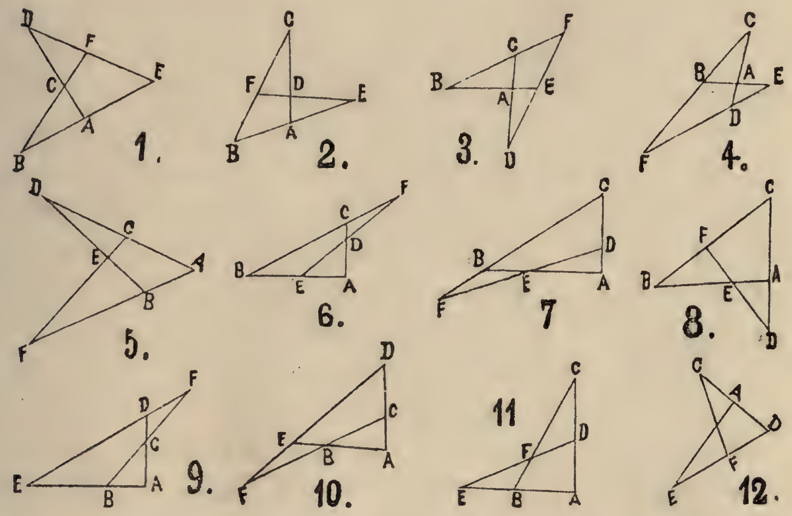


Que si maintenrnt nous en faisons autant avec la seconde des quatre premières figures, en ce qui concerne les intersections d'une quatrième ligne, nous obtiendrons douze nouvelles figures dont chacune correspondra à une des douze figures ci-dessus ;

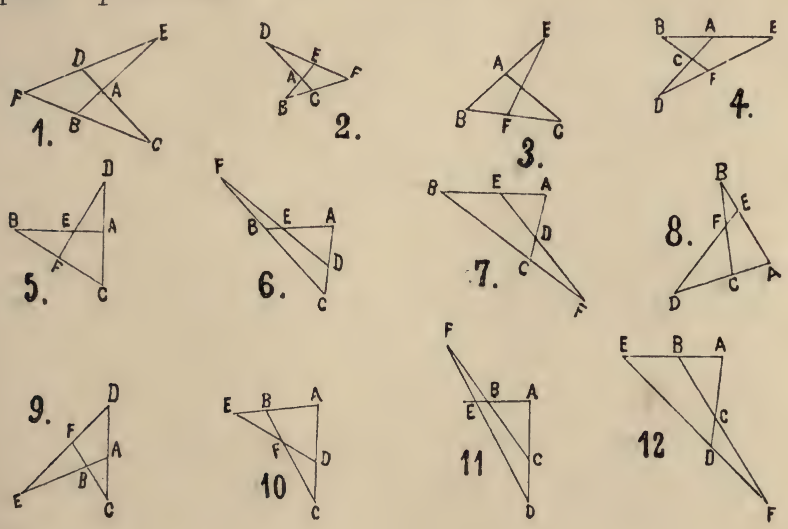




Il en sera absolument de même avec la troisième des quatre figures premières.



Enfin il en sera de même de la quatrième figure des quatre premières.



Ce qui fait en tout 48 figures en tenant compte des quatre directions. Que si l'on fait abstraction de cette considération, chaque groupe de quatre figures, eu égard à la disposition des lettres, se ramène à une seule, et le nombre total de 48 revient à 12.

Or, à raison du grand nombre des rapports qui se forment entre les différentes lignes, de la multiplicité de leurs relations et de leurs démonstrations, les géomètres ont été obligés de suivre diverses méthodes et parfois aussi de convenir de leur impuissance à embrasser tous les cas; et même à raison de ces difficultés, il y en a qui ont préféré abandonner cette théorie pour s'attacher à ce qui *peut en tenir lieu*. Quant à moi, je ne connais sur ce sujet rien de préférable à ce qu'en a dit Hussam-Uddin le Salar dont j'ai déjà fait mention. L'analyse qu'il présente des différents cas est pleinement suffisante, si ce n'est qu'il s'est montré trop parcimonieux dans ses démonstrations.

Je vais donc rapporter dans ce traité ce qu'il en a dit en ajoutant sur certains points des idées qui me sont propres.

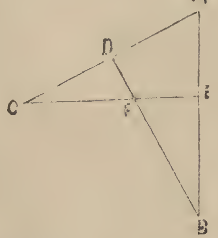
Dieu seul procure le succès.

CHAPITRE II.

Désignation des parties qui composent cette figure. (Le quadrilatère complet) — Propositions relatives aux rapports qu'on y trouve.

Les différents points de vue auxquels cette figure peut être considérée, se ramènent facilement à un seul, en tant que cette figure se compose de deux lignes extérieures et

de deux lignes intérieures, qui se coupent de la manière indiquée ci-après.



Dans les développements qui vont suivre, nous conserverons, pour plus de facilité, les mêmes lettres aux places qu'elles occupent ici.

Maintenant j'appelle *colonnes* les quatre lignes non parallèles et non juxtaposées, AB, AC, CE, BD qui constituent la figure. Les intersections de ses colonnes sont au nombre de six, A, B, C, D, E, F. Chaque colonne comprend trois lignes déterminées par trois points. Ainsi pour AB, on a les trois lignes AB, AE, EB; pour AC, les trois lignes AC, AD, DC; pour EC, les trois lignes EC, EF, FC; pour DB, les trois lignes DB, DF, FB. Il y a donc en tout douze lignes, et quatre triangles, ABD, ACE, FEB, CDF; lesquels triangles ont pour côtés les lignes en question.

Ces quatre colonnes prises deux-à-deux, donnent six paires, AB et BD; AB et AC; AB et CE; BD et AC; BD et CE; AC et CE; — et chaque paire comprend entre ses cotés deux des douze lignes. En outre chacune de ces douze lignes est l'*associée* de cinq lignes et la *dissociée* des six autres. Deux lignes sont dites associées, lorsqu'elles entrent dans le rapport composé ou dans les rapports simples qui en font partie, l'une en qualité d'antécédent et l'autre en qualité de conséquent. Les lignes dissociées sont celles qui ne donnent pas lieu à un pareil rapport. L'association entre deux lignes a lieu (ainsi qu'on verra) dans trois cas: 1° lorsque les deux lignes se trouvent sur le prolongement l'une de l'autre; 2° lorsqu'elles forment les côtés

d'un angle de triangle; 3° lorsqu'elles tombent entre deux colonnes. Chaque ligne (on s'en convaincra aisément en jetant les yeux sur la figure), a deux lignes associées selon le 1°; deux lignes associées selon le 2° et une seule ligne associée selon le 3°. — Ce sont là les cinq lignes associées de chaque ligne, dont nous avons parlé plus haut; quant aux six autres elles lui sont dissociées: et ce sont ces trois associations que nous désignerons sous les termes d'association de la 1ère, de la 2ème et de la 3ème espèce.

Ainsi la ligne AE. p. e. est en association de la 1ère espèce avec les lignes AB, EB; elle est en association de la 2ème espèce avec les lignes AC, EC; et elle est en association de la 3ème espèce avec la ligne DF. Quant aux six autres lignes AD, DC, EF, FC, DB, FB; elles lui sont dissociées. — La 3ème association n'a donc lieu que par rapport à une seule ligne; cependant elle équivaut virtuellement à nne double association ainsi que cela sera expliqué plus bas.

De plus, tout rapport composé, supposant six termes, ainsi que cela a été établi dans le Livre I, il en résulte que toutes les fois qu'un tel rapport se vérifie entre six lignes de la figure, il y en a six autres qui restent *inactives*. Dans ce cas, trois de ces dernières se trouvent toujours sur le même prolongement et constituent ce qu'on appelle la colonne *inactive*, tandis que les trois autres déterminent un triangle que nous appellerons le triangle *inactif*.

Quant aux six lignes qui constituent le rapport composé, les deux termes de chacun des trois rapports (dont est formé le rapport composé), tomberont nécessairement dans un des trois cas d'association. Si donc les deux termes des trois rapports sont reliés par une association de même espèce, nous disons que ces rapports sont *ordonnés*; dans le cas contraire, les rapports sont dits *confondus*. Il y a de plus à noter que les trois lignes qui entrent dans le

même *membre* d'un rapport composé, se trouvent être toujours *dissociées.* (4)

Ces règles ainsi posées, nous appellerons proposition de la 1ère, de la 2ème, de la 3ème espèce, la proposition ayant pour objet un rapport composé, dont les deux termes sont entre eux en asssociation de la 1ère, 2ème, 3ème espèce. Chacune de ces propositions pouvant d'ailleurs se subdiviser en plusieurs autres selon la nature des rapports ordonnés ou confondus qu'elle doit embrasser.

Le fondement de la théorie, c'est la proposition de la 1ère espèce, ordonnée (5). Les autres cas n'en sont que des accessoires, ainsi que nous allons l'expliquer, avec l'aide de Dieu. —

CHAPITRE III.

Des différents cas de la proposition première.

Nous avons dit que dans la proposition première l'association des deux termes du rapport composé est de la première espèce, c. à. d. que les deux termes, ou les lignes qui les représentent se trouvent sur la même droite. Ces deux termes auront donc en commun l'un des trois points de la colonne sur laquelle ils sont situés. Si ce point commun est un des points extrêmes de la colonne les deux termes (les deux lignes) du rapport seront superposés, et le rapport sera *implicite*; sinon les deux termes (les deux lignes) se trouvent sur le prolongement l'un de l'autre, et le rapport est dit *explicite*; et des deux autres points de la *colonne* l'un demeure propre à l'antécédent et l'autre au conséquent; en d'autres termes ces points délimitent les deux termes

sans qu'ils leur soient communs. Si p. e. dans la figure précédente je considère le rapport de BE à EA, le point E se.. commun aux deux termes; B sera le point propre à l'antécédent, A, le point propre au conséquent, et le rapport est explicite. Par contre dans le rapport de BA à AE, (qui est implicite) A est le point commun, B le point propre à l'antécédent, E le point propre au conséquent et ainsi de suite. La colonne sur laquelle sont situés les deux termes du rapport composé est dite colonne du rapport composé; et celle qui la coupe au point commun aux deux termes est la colonne *inactive*; celle qui aboutit au point propre à l'antécédent est la colonne du 1er rapport: celle qui se termine au point propre au conséquent, porte le nom de colonne du 2ème rapport.

La colonne inactive contient trois points, et il en reste trois autres qui déterminent le triangle inactif. La colonne et le triangle inactifs comprennent ainsi six lignes, qui toutes demeurent inactives dans cette discussion, les autres six constituant les termes des trois rapports. Deux de ces dernières, celles qui se trouvent sur la colonne du rapport composé, servent d'antécédent et de conséquent au rapport composé; deux autres, antécédent et conséquent du 1er rapport, se trouvent sur la colonne de ce rapport; ici l'antécédent est la ligne contigue à l'antécédent du rapport composé sur l'angle du triangle inactif; quant au conséquent c'est ce qui reste, c. à. d. qu'il est formé par le côté qui est contigu a son antécédent au point de jonction des deux lignes. Enfin les deux autres lignes sont situées sur la colonne du 2ème rapport; ici le conséquent est le côté contigu au côté qui sert de conséquent au rapport composé sur l'un des angles du triangle inactif; quant à l'antécédent il est situé entre le conséquent du 1er rapport et le conséquent *(du 2ème rapport)*.

Ces six lignes qui constituent les six termes du rapport

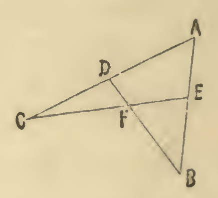
composé comprennent six points, les trois de la colonne et les trois du triangle inactif de manière que chacune soit située entre un angle du triangle inactif et la colonne inactive. L'angle qui sert de point de départ à l'antécédent du rapport composé et à celui du 1[er] rapport s'appelle *l'angle de l'antécédent ;* ou *premier angle ;* l'angle auquel aboutissent les conséquents du rapport composé et du second rapport, s'appelle *angle du conséquent* ou *second angle* ; quant au 3[ème] angle auquel aboutit le conséquent du premier rapport, et d'où part l'antécédent du 2[ème] rapport, on l'appelle *angle commun.*

D'après cela tous les antécédents des trois rapports aboutissent à la colonne inactive, et c'est de cette colonne que partent les trois conséquents.

Lorsque le rapport se présente sous la forme que nous venons d'indiquer, nous nous trouvons dans le cas de la *proposition première, ordonnée.* Après quoi, si nous intervertissons la place du 1[er] et du 2[ème] rapport entre eux, le rapport sera dit *interverti* ; et si nous donnons comme 1[er] rapport, un rapport ayant pour antécédent, l'antécédent du 2[ème] rapport et pour conséquent, le conséquent, du 1[er] rapport ces deux termes se trouvant en assossiation de le 2[ème] espèce,— le 2[ème] rapport restera formé de l'antécédent du 1[er] rapport et du conséquent du 2[ème] rapport (assossiés de la 3[ème] espèce), et ce changement fait que le rapport est alors appelé *confondu.* Il en est de même dans le cas contraire. (c. à d. dans le cas où le 1[er] rapport conservant son antécédent prend pour conséquent celui du 2[ème] rapport, auquel cas ce dernier a pour conséquent celui du 1[er] rapport).

Ainsi prenons la colonne AB. Le rapport BE à EA est composé du rapport $\frac{BF}{FD}$ et du rapport $\frac{DC}{CA}$. La colonne AB, est la colonne du rapport composé, E, le point com-

mun, B, le point propre à l'antécédent, A le point propre au conséquent, EC, la colonne qui coupe AB au point E



est la colonne inactive, sur laquelle se trouvent les points C,F,E; les trois autres points de la figure A,B,D, forment le triangle inactif ABD. Les six lignes AB,BD,AD,CE,EF,FC, sont les lignes inactives, et les six autres constituent les six termes des rapports sus-indiqués.

La colonne BD qui passe par le point B, propre à l'antécédent *est la colonne du 1er rapport*, dont les deux termes sont sur cette colonne. La colonne AC, qui passe par le point A propre au conséquent, est la colonne du 2ème rapport dont les deux termes sont sur cette colonne. BE et BF (antécédent du rapport composé et antécédent du 1er rapport) partent toutes les deux [*de l'angle B ou 1er angle pour aboutir*] aux points E,F de la colonne inactive. [*EA et CA, les conséquents du rapport composé et du 2nd rapport, partent des points E et C de la colonne inactive*], [a] et aboutissent au point A, sommet du 2ème angle du triangle inactif. FD, conséquent du 1er rapport commence à la colonne inactive et se termine à l'angle dit commun du triangle inactif. DC, antécédent du 2ème rapport tout au contraire, commence à l'angle D (FDA) et aboutit à la colonne inactive.

L'interversion des rapports n'offre pas de difficulté [6]. Quant à la confusion, il nous suffira de dire que le rapport est confondu quand nous le représentons sous la forme $\frac{BE}{EA} = \frac{DC}{DF} \times \frac{BF}{AC}$ ou lorsque nous intervertissons ces rapports.

(a) Les mots placés entre crochets et marqués en italiques sont omis dans le texte Arabe. Il y a là évidemment une lacune qu'il a fallu combler afin de rendre le texte intelligible.

Tout ce que nous venons de dire concerne le rapport *explicite*. Quant au rapport *implicite* le cas se présente quand je dis $\frac{RA}{BE}=\frac{AD}{DC}\times\frac{CF}{FE}$, ou bien $\frac{BA}{AE}=\frac{BD}{DF}\times\frac{FC}{CE}$.

Auquel cas vous pourrez appliquer avec un peu de réflexion tout ce que nous venons de dire plus haut.

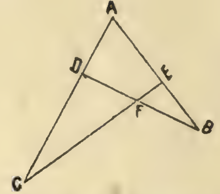
CHAPITRE IV.

De la proposition de la seconde espèce et de ses différentes formes.

Nous avons déjà dit que dans la 2nde proposition il s'agit de l'association de la 2nde espèce, où l'antécédent et le conséquent de chaque rapport du rapport composé comprennent un angle de triangle (7); le côté opposé à l'angle du triangle, dont on tire l'antécédent et le conséquent du rapport composé, appartient à la colonne inactive; (qui est ainsi déterminée); et les trois points restant (en dehors de la colonne inactive) déterminent le triangle inactif d'une manière analogue à ce qui a été expliqué dans le chapitre précédent. Ils forment d'ailleurs les sommets de trois angles (ABD, AEC, DFC) ayant pour côtés opposés trois lignes qui se trouvent sur la colonne inactive. On détermine ainsi trois triangles, dont le premier est le triangle du rapport composé; le second, celui du 1er rapport (composant), et le troisième, celui du 2ème rapport (composant). Le premier angle, celui auquel aboutit l'antécédent du rapport composé et d'où part son conséquent, est l'angle commun; le second angle, c. à. d. celui auquel aboutit l'antécédent du premier rapport (composant) et d'où part son conséquent, est l'angle premier ou l'angle de l'antécédent: et le troisième angle, c. à. d. celui auquel aboutit l'anté-

cédent du 2ème rapport (composant) et d'où part son conséquent est le 2me angle, ou l'angle du conséquent. Tous les trois antécédents partent de la colonne inactive et c'est à cette colonne qu'aboutissent tous les conséquents.

Entre l'antécédent du 1er rapport (composant) et l'antécédent du rapport composé, l'association est toujours de 1ère espèce; ainsi qu'entre le conséquent du 2ème rapport et celui du rapport composé, tant que, bien entendu, le rapport demeure *ordonné*. Mais s'il y a dans le rapport *confusion*, de sorte que le premier rapport (composant) soit formé du même antécédent qu'auparavant et du conséquent du 2ème rapport, l'association sera de la 3ème espèce, pendant que l'association entre les deux termes du 2ème rapport sera alors de la 1ère espèce.



Ainsi reprenant la figure précédente et partant de la relation $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{EC} \times \frac{CF}{FD}$ nous avons pour colonne inactive AC et pour triangle inactif BEF; et vous pourrez appliquer aux lignes de la figure tout ce que nous venons d'expliquer, sans qu'il soit nécessaire de nous livrer à des répétitions.

CHAPITRE V.

De la proposition de la troisième espèce et de ses différentes formes.

Cette proposition se rapporte au cas où les différents termes du rapport composé aussi bien que des deux rapports

composants sont formés de lignes comprises entre deux colonnes de la figure, (association de la 3ème espèce).

Ici chacune des deux colonnes (entre lesquelles tombent les deux termes du rapport composé) peut être prise comme colonne inactive; le triangle inactif sera dès lors formé par les trois points qui restent hors de la colonne (considérée comme inactive) et les six autres lignes constitueront les deux termes des trois rapports. Des trois angles du triangle inactif, l'angle commun sera celui d'où partent le conséquent du 1er rapport (composant) et l'antécédent du 2nd rapport (composant); l'angle de l'antécédent ou premier angle sera celui d'où partent l'antécédent du rapport composé et celui du premier rapport (composant) et l'angle du conséquent sera celui d'où partent le conséquent du rapport composé et celui du 2nd rapport composant. Les six lignes aboutissent toutes également à la colonne inactive.

Entre l'antécédent du composé et celui du 1er rapport ainsi qu'entre le conséquent du composé et celui du 2nd rapport il y aura association de seconde espèce; tandis que entre l'antécédent du composé et celui du 2nd rapport aussi bien qu'entre le conséquent du composé et celui du 1er rapport il y aura association de première espèce.

C'est ce qui arrive lorsque le rapport est *ordonné*; que si l'on intervertit les deux rapports alors entre l'antécédent du composé et celui du premier rapport, aussi bien qu'entre le conséquent du composé et celui du second rapport il y aura association de première espèce pendant que, entre l'antécédent du composé [*et celui du second rapport*] [a] aussi bien qu'entre le conséquent du composé et celui du premier rapport, il y aura association de la seconde espèce.

Enfin si le rapport est confondu, alors l'association entre les deux termes du premier rapport sera de première espèce, et celle entre les deux termes du second rapport sera de seconde espèce. Ainsi dans la figure ci-dessus prenons le

(a) Les mots entre crochets ne se trouvent pas dans le texte,

rapport $\frac{BA}{FC}$ dont les deux termes sont des lignes comprises entre les colonnes AC, BD. Si nous voulons considérer comme colonne inactive le côté AC alors EFB sera le triangle inactif,

B sera l'angle de l'antécédent
F „ „ du conséquent
E „ „ commun

et le rapport $\frac{BA}{FC}$ se compose du rapport $\frac{BD}{EC}$ (lignes comprises entre les colonnes AB, AC) et du rapport $\frac{EA}{FD}$ „ „ „ CA, CE)

Que si nous adoptons comme colonne inactive la colonne BD. alors AEC sera le triangle inactif, A sera l'angle de l'antécédent, C celui du conséquent, E l'angle commun, et le rapport $\frac{AB}{CF}$ dont les deux termes sont compris entre les deux colonnes susmentionnées, sera composé du rapport $\frac{AD}{EF}$ (deux lignes comprises entre les colonnes A B, BD), et du rapport $\frac{EB}{CD}$ (deux lignes comprises entre les colonnes BD, EC).

Vous trouverez d'une manière analogue le cas d'interversion ainsi que celui de confusion.

Il résulte de ce qui précède que dans les trois rapports dont l'ensemble complète l'expression du rapport composé il y a l'une des quatre colonnes, celle qui constitue la colonne inactive qui se combine tour à tour avec chacune des trois autres colonnes de manière que chaque terme du rapport soit compris entre la colonne inactive et une autre colonne. Une autre conséquence c'est que tout rapport composé de cette espèce peut être exprimé de deux manières. c. à. d. au moyen de deux paires de rapports chacune ayant pour termes des lignes différentes. La cause en est que l'on peut toujours prendre comme colonne inactive l'une des deux

colonnes, sans qne rien oblige de prendre l'une plutôt que l'autre. C'est précisément ce qui nous faisait dire que bien que dans l'association de la 3ème espèce, une ligne n'ait pour associée qu'*une seule ligne*, cette association unique équivaut pourtant à une double association (comme cela est le cas avec les lignes associées de première ou de seconde espèce).

CHAPITRE VI.

Introduction à la démonstration de toutes ces trois propositions.

La démonstration se fait en tirant une parallèle à une ligne connue par un point d'intersection déterminé de deux colonnes de manière à former quatre triangles semblables deux à deux. Or, une droite partant de l'intersection de deux droites, ne saurait leur être parallèle ni aboutir à l'une d'elles; elle ne peut donc qu'être parallèle à l'une des deux autres colonnes, et sécante par rapport à l'autre. Cette parallèle part toujours d'un des angles du triangle inactif; elle est donc nécessairement ou bien parallèle à la colonne inactive et sécante par rapport à la quatrième colonne, ou bien l'inverse. Ainsi la parallèle peut se présenter dans chacune des trois propositions de six manières différentes; c. à. d. en nombre double des angles des différents triangles inactifs qu'on peut former; et cela de manière à fournir pour chaque cas une démonstration; soit six démonstrations en tout. Comme d'autre part il y a six points en tout, et qu'on ne peut tirer, de chaque point, plus de deux lignes, une telle parallèle peut être tirée de douze manières ainsi que cela ressort du tableau suivant:

1ère Paire (parallèle tirée du point A)

Triangle	BAH	semblable au triangle	BEF
„	AHD	„ „	DFC
„	AHE	„ „	EFB
„	CHA	„ „	CFD

2ème Paire (parallèle tirée du point B)

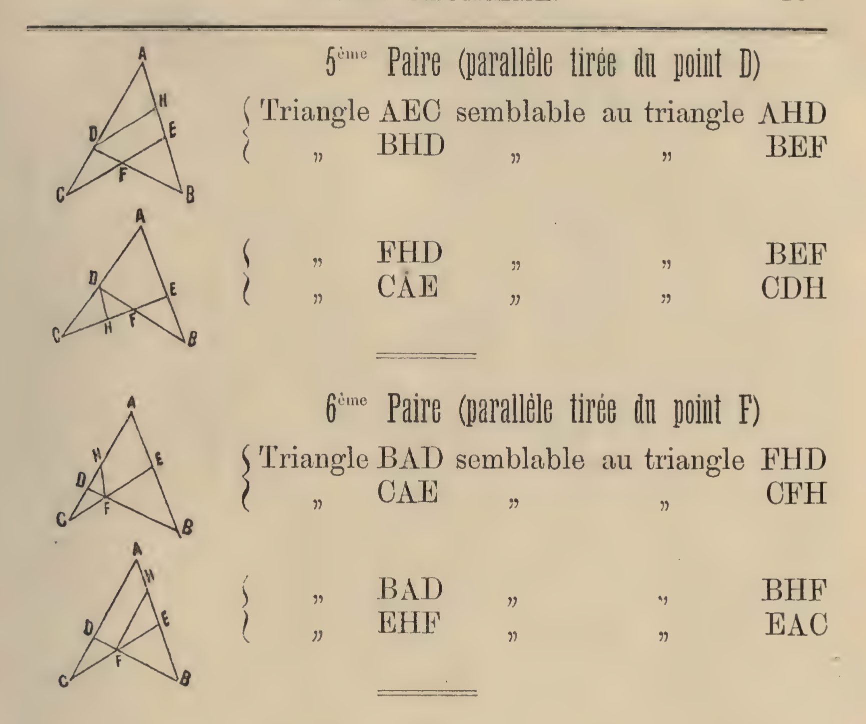
Triangle	BHE	semblable au triangle	EAC
„	BHF	„ „	FDC
„	ABH	„ „	AEC
„	DBH	„ „	DFC

3ème Paire (parallèle tirée du point C)

Triangle	BAD	semblable au triangle	DHC
„	BEF	„ „	FHC
„	AHC	„ „	ABD
„	EHC	„ „	EBF

4ème Paire (parallèle tirée du point E)

Triangle	ABD	semblable au triangle	AEH
„	CEH	„ „	CFD
„	BAD	„ „	BEH
„	EHF	„ „	FDC



5ème Paire (parallèle tirée du point D)

Triangle	AEC	semblable	au triangle	AHD
„	BHD	„	„	BEF
„	FHD	„	„	BEF
„	CAE	„	„	CDH

6ème Paire (parallèle tirée du point F)

Triangle	BAD	semblable	au triangle	FHD
„	CAE	„	„	CFH
„	BAD	„	„	BHF
„	EHF	„	„	EAC

Apprenez que chacun des quatre triangles de la figure du quadrilatère correspond à six des douze figures ci-dessus, lesquelles six figures sont celles-là mêmes dont il est fait usage dans la proposition où nous avons comme triangle inactif, le triangle en question. C'est ce qui est indiqué dans le tableau ci-joint:

Triangles inactifs	Paires de triangles semblables qui d'après le tableau précédent correspondent à ce triangle inactif.	Dans ce cas les lignes actives sont appelées
ABD	1ère Paire (parallèle partant du point A) 2ème „ („ „ „ B) 5ème „ („ „ „ D)	Les six premières.
ACE	1ère „ („ „ „ A) 3ème „ („ „ „ C) 4ème „ („ „ „ E)	Les six deuxièmes.

BEF	2ème	„	(„	„	„	B)	Les six troisièmes.
	4ème	„	(„	„	„	E)	
	6ème	„	(„	„	„	F)	
CDF	3ème	„	(„	„	„	C)	Les six quatrièmes.
	5ème	„	(„	„	„	D)	
	6ème	„	(„	„	„	F)	

On voit par là que chaque paire correspond à deux triangles et cette correspondance peut être aussi figurée de la manière ci-après:

Triangle ABD inactif	1ère Paire	Triangle ACE inactif
2ème Paire	Cinquième Paire / Quatrième Paire	3ème Paire
Triangle BEF inactif	6ème Paire	Triangle CDF inactif

La parallèle tirée d'un des sommets du triangle inactif aboutit à une colonne; il en résulte une intersection que nous appellerons *intersection secondaire.* Si cette intersection a lieu sur la colonne inactive nous donnons à la parallèle la dénomination de *complément du rapport.* [*Que si l'intersection a lieu sur la quatrième colonne et non sur la colonne inactive alors le complément du rapport sera la ligne comprise entre le point où la parallèle rencontre la 4ème colonne et la colonne inactive*]. ([a]) Et alors dans toutes les démonstrations ce *complément* vient s'adjoindre aux deux termes d'un rapport de manière qu'entre ce complément et les deux termes il s'établisse deux rapports.

(a) Toute cette période placée entre crochets manque dans le manuscrit; elle devait pourtant s'y trouver ainsi que cela résulte de la discussion du chapitre suivant.

Cette adjonction peut se faire de trois manières différentes: 1° le complément est placé avant les deux termes, de manière qu'entre ce complément et l'antécédent du rapport il résulte un rapport; et ce même complément est adjoint (intercalé) au rapport existant entre l'antécédent et le conséquent, de sorte qu'il en résulte deux rapports; dans ce cas on dit que le complément du rapport est antérieur à ses termes; 2° le complément est placé entre l'antécédent et le conséquent, de manière qu'il résulte un rapport entre l'antécédent et le complément, et un autre rapport entre le conséquent et le complément; on obtient ainsi deux rapports et dans ce cas le complément est appelé intermédiaire; 3° le complément est placé après, de manière à ce qu'au rapport existant vient s'adjoindre le rapport qui se produit entre le conséquent et le complément. On obtient ainsi également deux rapports et on qualifie alors le complément de *postérieur* ou *adjoint*.

L'utilité de toutes ces opérations sera bientôt expliquée avec l'aide de Dieu. Mais il n'en était pas moins nécessaire de les signaler avant d'entrer dans le détail des démonstrations. (8)

CHAPITRE VII.

Sur la manière d'établir les démonstrations dans le cas de la proposition première.

Prenons le cas du rapport *ordonné*.

a) La parallèle est tirée du 1er angle, de l'angle de l'antécédent. Nous plaçons le complément *antérieur* aux deux termes du 2ème rapport de manière qu'il en résulte entre ce complément et son antécédent un rapport égal au premier rapport, et entre ce complément et son conséquent un rapport égal au composé.

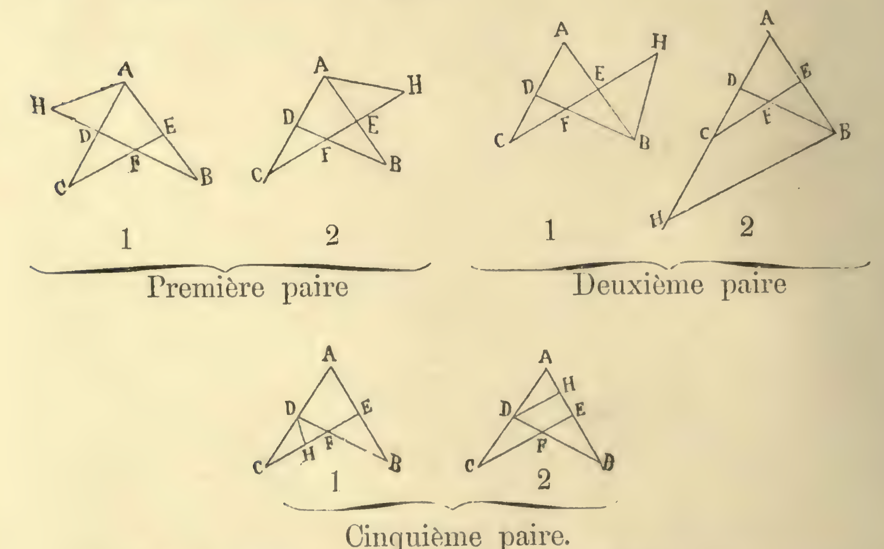
Avec cela la démonstration est achevée.

b). La parellèle est tirée du 2[me] angle, de l'angle du conséquent. Nous plaçons le complément *postérieur* aux deux termes du 1[er] rapport de manière à avoir entre le conséquent (du 1[er] rapport) et le complément, un rapport égal au deuxième rapport, et entre son antécédent et le complément un rapport égal au rapport composé.

c). La parallèle est tirée de l'angle commun. Nous plaçons le complément *intermédiaire* entre les deux termes du composé, afin d'avoir entre l'antécédent (du rapport composé) et le complément un rapport égal au premier rapport et aussi entre le complément et le conséquent du rapport composé, un rapport égal au 2[d] rapport.

Par exemple soit à démontrer le rapport $\frac{BE}{EA} = \frac{BF}{FD} \times \frac{DC}{CA}$

C'est le rapport connu sons la dénomination de *rapport explicite de Ptolémée.* Nous avons comme triangle inactif, le triangle ADB; et nous nous trouvons ainsi dans le cas des *six premières* comme ci aprés:



Ici B est le premier angle, A le second, D l'angle commun. Pour la première paire la parallèle part de A.

Nous plaçons donc le *complément* HF pour la 1ère paire (fig. 1) et AH pour la 1ère paire (fig. 2) *postérieur* aux deux termes du premier rapport et nous avons: BF l'antécedent, FD le consequent, HF le complément, de sorte que, à cause de la similitude des triangles DFC, DAH, ou a pour la fig. 1 $\frac{FD}{HF} = \frac{DC}{CA} =$ 2ème rapport, et aussi à cause de la similitude des triangles BFE, BAH

$$\frac{BF}{FH} = \frac{BF}{FD} \times \frac{FD}{FH} = \frac{BE}{EA} = \text{rapport composé.}$$

De même pour la fig. 2. $\frac{FD}{AH} = \frac{DC}{AC} =$ 2nd rapport, et $\frac{BF}{AH} = \frac{BE}{EA} =$ rapport composé. Dans les deux cas, le rapport composé est formé, comme on le voit, du premier rapport et d'un rapport équivalent au 2nd rapport.

(C. Q. F. D.)

Pour la 2ème paire, la parallèle part du premier angle, l'angle B.

Dans la fig. 1. de cette paire le complément est BH. Dans la fig. 2. le complément est CH.

Si donc nous plaçons ces deux lignes *antérieures* aux termes du 2nd rapport, nous aurons BH, HC, le complément, DC l'antécédent, AC, le consequent et par suite:

$\left(\frac{\textit{complément}}{\textit{antécedent}} = \frac{BF}{FD} =\right.$ 1er rapport,) dans la fig. 1. à cause de la similitude des triangles semblables BHF, FCD; et dans la fig. 2. à cause des triangles semblables ABH, AEC; et voilà comment le rapport composé se trouve être formé d'un rapport égal au premier, et du second. C. Q. F. D.

Pour la 5ème paire, la parallele est tirée du point D sommet de l'angle commun.

Dans la fig. 1 le complément est DH

« « 2 « EH

les quels étant placés *intermédiaires* entre les deux termes du

rapport composé, on a BE l'antécédent, DH, HE le complément, EA le conséquent et par suite ($\frac{\textit{antécédent}}{\textit{complément}} = 1^{er}$ rapport.) dans la premiére figure à cause de la similitude des triangles BEF, FHD et dans la fig. 2. à cause de la similitude des triangles BEF, BDH. Quant au rapport du complément au conséquent il est égal au $2^{ème}$ rapport, dans la $1^{ère}$ figure, à raison de la similitude des triangles CHD CEA et dans la 2^{nde} figure, à raison de la similitude des triangles AEC, AHD.

Et voilà comment, cette fois-ci encore, le rapport composé se trouve formé de deux rapports égaux au 1^{er} et au 2^{nd}. C. Q. F. D.

Nous venons de donner six démonstrations du rapport ordonné. Que si la relation à prouver est celle du rapport de la $1^{ère}$ espèce *confondu* et qu'il s'agisse de démontrer que $\frac{BE}{EA} = \frac{BF}{AC} \times \frac{CD}{FD}$, il y aura encore trois cas à considérer.

a). La parallele est tirée du 1^{er} angle.

Placez le complément *antérieur* aux deux termes du 1^{er} rapport et vous aurez $\frac{\textit{le complément}}{\textit{antécédent du } 1^{er} \textit{ rapport}} = 2^{ème}$ rapport,

$\frac{\textit{le complément}}{\textit{consequent du } 1^{er} \textit{ rapport}} =$ rapport composé.

et le rapport composé se trouvera formé dans ce cas d'un rapport égal au 2^{nd} et du 1^{er} rapport.

b). La parallèle est tirée du $2^{ème}$ angle.

Placez le complément *postérieur* aux deux termes du premier rapport vous aurez:

$\frac{\textit{conséquent du premier rapport}}{\textit{complément}} = 1^{er}$ rapport (du rap. confondu).

$\frac{\textit{antérieur du premier rapport}}{\textit{complément}} =$ rapport composé.

c). Si la parallele est tirée de l'angle commun, placez les deux termes du premier rapport intermédiaires entre les

deux termes du rapport composé successivement de manière à avoir trois rapports et placez le complément intermédiaire entre les deux termes du 2[nd] rapport de manière à avoir deux rapports. Alors le 1[er] de ces deux rapports sera égal au dernier des trois tandis que le second de ces deux rapports sera égal au premier des trois, et le premier rapport restera entre les deux multiplié par le rapport composé inversement. Par là la démonstration sera achevée.

Par exemple dans la fig. 2 de la 5[ème] paire (page 43) le complèment est EH. Si nous le plaçons intermédiaire entre les termes du 2[nd] rapport on aura:

CD l'antécédent; — EH le complément; — FD le conséquent (du 2[nd] rapport); — AC le conséquent (du 1[er] rapport); — EA le conséquent du composé; — et il viendra:

$\frac{BE}{BF} = \frac{EH}{FD}$ à cause des triangles semblables BEF BHD, et

$\frac{AC}{EA} = \frac{CD}{EH}$ à cause des triangles semblables AHD, AEC,

et voilà que le rapport composé sera formé de trois rapports, dont les deux seront égaux au second seul, tandis que le 3[me] sera le 1[er], à lui seul. C. Q. F. D.

Vous pourrez traiter tous les autres cas de la même manière.

Si les deux rapports sont intervertis, c. à. d. s'il y a interversion entre le second et le premier, il faudra intervertir tout ce que nous avons dit plus haut touchant le rapport ordonné. Ainsi.

a″). Si la parallèle est tirée du 1[er] angle:-
Vous placez le complément antérieur aux deux termes du *1[er] rapport;*

b″) Si la parallèle est tirée du 2[ème] angle:
Vous placez le complément postérieur aux deux termes du 2[nd] rapport;

c″). Si la parallele est tirée de l'angle commun:
Vous placez le complément intermédiaire entre les deux termes du composé, *comme cela avait lieu pour le premier.*

Enfin, s'il y a à la fois confusion et interversion alors:

a‴). Si la parallèle est tirée du 1er angle:
Vous placerez le complément antérieur aux deux termes du 2nd rapport.

b‴). Si la paralèle est tirée du 2ème angle:
Vous placerez le complément postérieur aux deux termes du 1er rapport.

c‴). Si la parallèle est tirée de l'angle commun:
Vous placerez le complément intermédiaire entre les deux termes du 1er rapport; et aussi les deux termes du 2nd rappnrt intermédiaires entre les deux termes du composé; et en général il y aura lieu de rapporter au premier tout ce qui se rapportait au second et inversement.

Je laisse à vous lecteur le soin de fournir les exemples. (9).

CHAPITRE VIII.

Sur la manière d'établir les démonstrations dans les cas de la proposition deuxième.

Dans le cas de la 2ème proposition ordonnée;

a). Si la parallèle est tirée du 1er angle:
Vous placez le complément *postérieur* aux deux termes du 1er rapport;

b). Si la parallèle est tirée du 2ème angle:
Vous placez le complément *antérieur* aux deux termes du 2ème rapport;

c). Si la parallèle est tirée de l'angle commun:
Vous placez le complément *intermédiaire* entre les deux termes du rapport composé; et vous achèverez la démonstration d'une manière analogue à celle qui a été expliqué plus haut.

Dans le cas de la 2ème proposition confondue:

a') Si la parallèle est tirée du 1er angle:

Vous placerez le complément *postérieur* aux deux termes du 1er rapport.

b) Si la parallèle est tirée du 2ème angle:

Vous placerez le complément *antérieur* aux deux termes du 2ème rapport.

c') Si la parallèle est tirée de l'angle commun:

Vous placerez le complément *intermédiaire* entre les deux termes du 2ème rapport, et vous placerez aussi les deux termes du 1er rapport intermédiaires entre les deux termes du composé et alors le premier et le second de ces trois rapports seront égaux au 2ème et au 1er rapport des *deux* autres rapports d'après la règle de la composition des proportions troublées.

Le cas de l'interversion soit simple, soit compliquée de confusion, revient à ce qui a été déjà expliqué.

Nous ne nous arrêterons pas à citer des exemples. (10).

CHAPITRE IX.

Sur la manière d'établir les démonstrations dans le cas de la proposition troisième.

Dans le cas de la proposition 3ème ordonnée:

a) Si la parallèle est tirée du 1er angle.

Placez les deux termes du 2ème rapport intermédiaires entre les deux termes du rapport composé; placez aussi le complément intermédiaire entre les deux termes du 1er rapport; et alors le 1er et le 2ème de ces deux derniers rapports deviennent égaux au dernier et au premier des autres trois, d'après la règle des proportions troublées.

b) Si la parallèle est tirée du 2ème angle.

On pocédera d'une manière inverse, en plaçant les deux termes du premier rapport intermédiaires entre les deux termes du composé et en plaçant aussi le complément intermédiaire entre les deux termes du 2ème rapport: alors on a l'égalité entre ces deux rapports et la démonstration au moyen des trois autres d'après la règle des proportions troublées.

c) Si la parallèle est tirée de l'angle commun:

On peut procéder de deux façons: 1°. En mettant les deux termes du 1er rapport entre les deux termes du rapport composé et le complément entre le 2ème rapport. 2° En mettant les deux termes du 2ème rapport entre les deux termes du composé et le complément entre les deux termes du 1er. Dans les deux cas le premier et le dernier des trois rapports deviennent égaux au 1er et au dernier des deux rapports d'après la règle des propositions réglées.

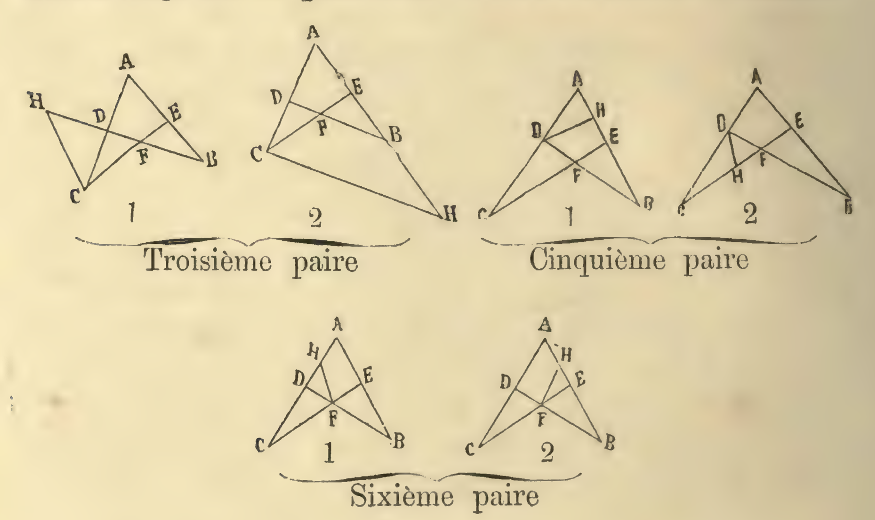
Donnons en un exemple. Il s'agit de prouver:

$\frac{BD}{EC} = \frac{AD}{EF} \times \frac{BF}{AC}$ en prenant comme col. inactive la col. AB; ou

$\frac{BD}{EC} = \frac{BA}{FC} \times \frac{FD}{EA}$ " " " AC.

Démonstration. En prenant pour colonne inactive la colonne AB, on aura pour angle inactif le triangle DFC.

D sera le 1er angle; C le 2ème; F l'angle commun et en faisant usage des *six quatrièmes* on aura les figures suivantes.



Pour la 5ème paire, où la parallèle part de D qui est le premier angle, si nous plaçons les deux termes du 2ème rapport intermédiaires entre les termes du composé, on aura BD, BF, AC, EC: et si nous plaçons le complément entre les termes du premier rapport, on aura AD, DH, EF, et dès lors il vient pour la fig. 1. $\frac{BD}{BF}=\frac{DH}{EF}$ et pour la fig. 2. $\frac{BD}{BF}=\frac{EH}{EF}$

Mais dans la fig. 1. $\frac{AC}{EC}=\frac{AD}{DA}$ et dans la fig. 2. $\frac{AC}{EC}=\frac{AD}{EH}$.

Pour la troisième paire, la parallèle partant de l'angle C qui est le 2ème angle, si nous plaçons les deux termes du premier rapport intermédiaires entre ceux du rapport composé, on aura BD—AD—EF—FC; et si nous plaçons le complément intermédiaire entre les 2 termes du 2ème, on aura BF—CH—BH—AC; alors il viendra:

$\frac{BF}{BH}=\frac{EF}{EC}$ (pour la fig. 1). et $\frac{BF}{CH}=\frac{EF}{EC}$ (pour la fig. 2.)

$\frac{BH}{AC}=\frac{BD}{AD}$ (pour la fig. 1.) et $\frac{CH}{AC}=\frac{BD}{AD}$ (pour la fig. 2).

Pour la 6ème paire, la parallèle partant de l'angle commun F, si nous plaçons les deux termes du 1er entre les deux termes du composé BD—AD—EF—EC; et le complément entre les deux termes du 2ème, BF—FN ou AH—AC, nous avons $\frac{BF}{AH}$ (fig. 1.) $=\frac{BD}{AD}$, $\frac{BF}{FH}$ (fig. 2.) $=\frac{BD}{AD}$

et aussi $\frac{AH}{AC}$ (fig. 1.) $=\frac{EF}{FC}$ et $\frac{FH}{AC}$ (fig. 2.) $=\frac{EF}{FC}$.

Que si nous plaçons les deux termes du second entre les deux termes du composé, BD—BF—AC—EC, et le complément entre les deux termes du 1er, AD—FH—EF, on aura: $\frac{BD}{BF}=\frac{AD}{AH}$ (fig. 1.) $=\frac{AD}{FH}$ (fig. 2.); et:

$\frac{AC}{EC}=\frac{AH}{EF}$ (fig. 1.) $=\frac{FH}{FE}$ (fig. 2.)

D'ailleurs il est évident que pour les angles 1^er^ et 2^ème^ l'égalité des rapports a lieu d'après la règle de composition des proportions troublées et que pour l'angle commun elle a lieu d'après la composition des proportions réglées.

Pour le cas où l'on prendrait AC pour colonne inactive on raisonnerait de même.

En cas d'interversion des rapports.

a') Si la parallèle est tirée du premier angle:

On placera les deux termes du premier, intermédiaires entre ceux du composé et le complément entre les deux termes du 2^ème^.

b') Si la parallèle est tirée du deuxième angle:

On placera les deux termes du second, intermédiaires entre ceux du composé et le complément intermédiaire entre les deux termes du 1^er^.

c') Tel quel.

En cas de confusion.

a'' b'') Si la parallèle est tirée du premier ou du second angle.

On placera le complément entre les deux termes du composé et l'on aura deux rapports égaux au premier et au second rapport d'après la règle des proportions troublées (dans le cas où la parallèle est tirée du 1^er^ angle) et d'après la proportion réglée (pour le cas où la parallèle est tirée du 2^ème^ angle).

c'') Si la parallèle est tirée de l'angle commun:

Les choses se passeront absolument comme dans le cas du rapport ordonné. Enfin s'il y a à la fois interversion et confusion, il y aura lieu d'intervertir la règle des proportions troublées ou réglées pour les deux angles précités. Nous ne prolongerons pas cette discussion en citant des exemples, et nous terminerons ici ce que nous avions à dire touchant l'établissement des démonstrations de toutes les trois propositions. (11).

CHAPITRE X.

Des limites qu'on peut assigner à la discussion concernant cette figure, ses rapports et ses démonstrations. Raison pour laquelle Ptolémée s'est borné aux deux cas de la première espèce.

Quelques auteurs ont construit des tables dans lesquelles ils montrent pour chaque espèce de question, à laquelle ils ont consacré une démonstration, les dix huit rapports qui dépendant les uns des autres se rattachent à chaque espèce. Mais il n'y a guère d'utilité en cela. Aussi allons-nous plutôt essayer de montrer comment on peut arriver à fixer les limites de cette question et la résumer.

Nous disons donc, que, comme il y a en tout douze lignes, que chacune d'elles mise en rapport avec une quelconque des cinq autres lignes donne lieu à un rapport composé de deux autres rapports et que l'une de ces cinq lignes équivaut virtuellement à deux lignes en ce sens, que le rapport composé auquel elle donne lieu peut être exprimé par deux systèmes de rapports équivalents, nous avons en tout comme évaluation des rapports effectifs le nombre de 60 et comme évaluation des rapports virtuels 72. Les rapports simples composant ces rapports composés et qui leur correspondent s'élèveront au double, soit 144, et le tout donnera 204. Mais ce nombre de 72 qui est celui de la totalité, je veux dire, qui est celui du chiffre total des rapports composés, exprime aussi le nombre de systèmes des deux rapports simples correspondant à chaque composé, lesquels systèmes s'accroissent du quadruple selon qu'ils sont ordonnées, intervertis ou confondus ce qui donne 288.

Maintenant chacune de ces 288 expressions peut donner lieu à 6 démonstrations soit à 1728 démonstrations en tout. Après quoi, si nous appliquons ces différents cas, et ces dif-

férentes démonstrations aux 12 figures que les auteurs qui ont traité de ce sujet sont dans l'habitude de considérer, on aura 3456 cas et 20736 démonstrations.

Mais nous pouvons aussi prendre en vue les 48 figures qui résultent de la considération des côtés, ce qui nous donnera $288 \times 48 = 13824$ cas et $6 \times 13824 = 82944$ démonstrations. Que si maintenant nous considérons, que, conformément à ce qui a été exposé au sujet du rapport composé, chaque rapport de ce genre implique 35 autres on a $13824 \times 36 = 497664$ expressions, chacune comprenant trois rapports. — Il est vrai que dans ce nombre il y aura bien des rapports qui seront répétés. Mais on peut envisager ces rapports comme dérivés d'autres rapports sans que, (ou bien que) on ne les considère pas tous comme également nécessaires et indépendants. Et voyez donc à quel nombre de rapports donne lieu une si petite figure! C'est là un effet de la volonté omnisciente de l'Etre Suprême! (12)

Parmi ce grand nombre de rapports, Ptolémée s'est borné à expliquer deux cas de la 1ère proposition: l'un qu'on désigne ordinairement sous le nom de *rapport implicite de Ptolémée* et l'autre qui est connu sous le nom de *rapport explicite* du même. La raison en est que celui qui aura étudié ces deux cas et aura connaissance des propriétés et autres modalités du rapport composé possède les preuves des autres cas.

Reprenons la figure du quadrilatère. Le cas implicite consiste dans le rapport $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DF} \times \frac{FC}{CE}$. Ici AC est la colonne inactive, BEF le triangle inactif; le rapport demeure ainsi formé des autres six lignes, ce qui, eu égard aux propriétés du rapport composé, donne 18 cas, dont tous les rapports formés au moyen de ces lignes sont connus. Si nous prenons maintenant AB comme colonne inactive et DFC comme triangle inactif, nous retombons absolument dans le cas

précédent, sauf que nous aurons échangé les points de droite avec ceux de gauche; si bien, qu'au moyen d'une marche identique à celle adoptée pour le 1er cas, les 18 autres rapports demeurent connus.

Le cas explicite consiste dans le rapport: $\frac{BE}{EA} = \frac{BF}{FD} \times \frac{DC}{CA}$.

Ici EC est la colonne inactive, ADB le triangle inactif, et conformément à ce que Ptolémée a expliqué on trouvera les 18 autres rapports. Que si l'on prend pour colonne inactive DB, et par conséquent, pour triangle inactif le triangle AEC, on aura une figure semblable à la précédente, sauf que les points sont échangés, et au moyen d'une marche identique à celle adoptée pour le 1er cas les 18 autres rapports demeurent connus. On arrive ainsi à connaître 72 rapports. L'interversion et la confusion peuvent ensuite faire monter le nombre de ces rapports au quadruple.

Or du moment que les colonnes sont au nombre de quatre, ainsi que les triangles inactifs, et que les rapports peuvent être démontrés, lorsqu'on s'attache à considérer tour à tour comme inactifs, chacune des colonnes et chacun des triangles, ce que Ptolémée en a dit joint à la connaissance des propriétés du rapport composé suffira à faire connaître le sujet de cette étude. C'est précisément pour cette raison aussi, c. à. d. pour la raison que ces deux rapports embrassent virtuellement tous les autres rapports, que Ptolémée a borné ses démonstrations aux deux précédents, bien qu'il ait eu recours aux autres aussi. C'est ainsi que dans le chapitre IXème du 2nd Livre de son Almageste il fait usage du rapport: $\frac{FD}{BD} = \frac{FC}{CE} \times \frac{EB}{AB}$ et que dans le chapitre VIème du VIIIème livre il cite le rapport $\frac{AB}{BE} = \frac{AD}{DC} \times \frac{CF}{EF}$ sans pourtant les faire précéder de leur démonstration. (13)

C'est ce que j'avais à dire sur ce point.

CHAPITRE XI.

Des rapports simples qu'on rencontre dans cette figure.

Il y a rapport simple dans cette figure lorsque dans un rapport composé deux termes dont l'un fait partie d'un *membre* et l'autre d'un autre *membre* se trouvent être égaux ainsi que nous l'avons déjà expliqué dans le Livre I.

Revenons à la figure du quadrilatére pour élucider ces cas:

Nous avons déjà prouvé que chacune des douze lignes de la figure entre en rapport avec cinq autres lignes et que l'une de ces lignes équivalant virtuellement à deux on peut dire que dans le rapport chaque ligne se trouve en association avec six autres. Or $12 \times 6 = 72$. Maintenant il y a rapport simple lorsque deux de ces lignes appartenant chacune à un *membre* sont égales. Mais une ligne ne peut être égale à sa partie, pas plus que la partie ne peut être égale au tout; et comme il y a quatre colonnes et que chacune contient deux parties, nous devons déduire de notre calcul ces deux cas impossibles c. à. d. 16 sur 72 ce qui fait qu'il ne nous en reste que 56. D'un autre côté lorsque nous disons que tel terme d'un membre est égal à tel autre terme de l'autre membre nous disons en même temps que ce dernier terme est égal au premier, d'où résulte nécessairement l'égalité de 28 termes à 28 autres. On a ainsi en tout 28 expressions dans lesquelles quatre lignes se trouvent en proportion et que nous faisons figurer dans le tableau ci-après:

	Lignes égales.		Lignes proportionnelles.			
1	AB	AD	BE	EF	DC	FC
2	AB	BD	AE	EC	FD	FC
3	AB	AC	AE	FD	EC	BD
4			EB	DC	EF	AD
5	AE	EB	AC	CD	FB	DF
6	AE	AC	EB	BF	DC	DF
7	AE	EC	AB	BD	FC	DF
8	AE	DF	AB	FC	DB	EC
9			EB	DC	BF	AC
10	EB	EF	AB	AD	FC	DC
11	EB	BF	AE	AC	DF	CB
12	EB	DC	AB	FC	AD	BF
13			AE	DF	AC	BF
14	AC	EC	AD	DB	EF	BF
15	AC	BF	AD	EF	BD	EC
16			DC	EB	FD	AE
17	AD	DC	AB	BE	FC	FE
18	AD	BD	AC	CE	BF	EF
19	AD	EF	AC	BF	EC	BD
20			DC	EB	FC	AB
21	DC	DF	CA	EA	BF	EB
22	DC	FC	DA	AB	EF	BE
23	BD	EC	BF	AC	EF	AD
24			DF	EA	FC	AB
25	BF	FD	BE	EA	CD	BA
26	BF	EF	BD	DA	CE	CA
27	FD	AC	FB	AB	EC	EA
28	EF	FC	EB	AB	CD	AC

Après quoi si l'on considère sur ces mêmes rapports les cas intervertis, implicites, explicites, échangés, etc. qui en dérivent, le nombre de ces rapports sera augmenté de beaucoup.

Quant à nous, nous terminerons ici ce que nous avions à dire sur le quadrilatère plan. (14).

En Dieu seul est le secours, le refuge et la pureté.



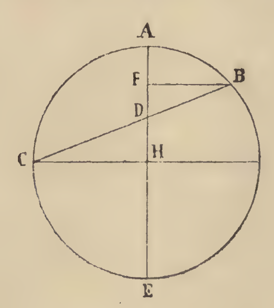
LIVRE III.

PRÉLIMINAIRES A LA FIGURE CONNUE SOUS LA DÉNOMINATION DE QUADRILATÈRE SPHÉRIQUE ET DE CE QUI EST NÉCESSAIRE POUR S'EN SERVIR UTILEMENT.

CHAPITRE I.

Notions préliminaires.

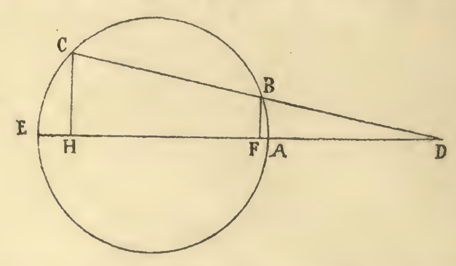
I. Si dans un même cercle la corde de deux arcs inégaux ayant une extrémité commune et dont chacun est moindre qu'une demi-circonférence est coupée par le diamètre passant par le point commun aux deux arcs, ce diamètre partagera la corde de la somme des arcs en deux parties proportionnelles aux sinus de ces arcs.



Soient AB AC deux arcs inégaux du cercle ABC, ayant leurs extrémités au point A; BC, la corde de leur somme; AE le diamètre passant par le point A; et soit la corde BC partagée au point D en deux parties BD, DC, je dis que $\frac{DB}{DC} = \frac{\text{sinus BA}}{\text{sinus AC}}$.

Démonstration. Abaissez BF, CH, perpendiculaires sur AE; ce seront là indubitablement les deux perpendiculaires de l'arc; les deux triangles BFD, HCD, ainsi formés, ayant les angles en D, égaux, comme opposés par le sommet, et les angles en F et H, également égaux comme droits seront semblables, et l'on aura $\frac{BF}{CH}=\frac{BD}{CD}$. C. Q. F. D.

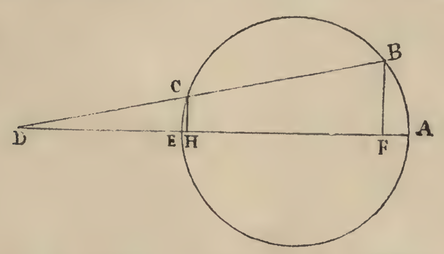
Si dans le même cercle l'un de deux arcs inégaux, dont chacun est moindre qu'une demi-circonférence, s'applique sur l'autre, de manière que ces deux arcs se terminent au même point, tirez la corde de la différence du plus grand sur le petit qui rencontrera lorsqu'elle sera prolongée, le prolongement du diamètre passant par l'extrémité commune aux deux arcs, et alors les parties de la ligne comprises entre l'extrêmité de chacun des deux arcs et le diamètre, seront entre elles comme les sinus respectifs de ces mêmes arcs.



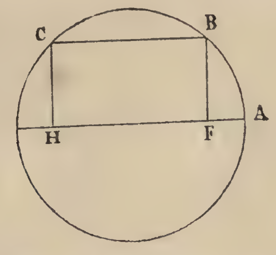
Ainsi soient deux arcs AB, AC, inégaux, dans le même cercle ABC, ayant le point A commun (partant du point A) et superposés; soit encore BC, leur différence. Prolongez la corde BC jusqu'à ce qu'elle rencontre en D le diamètre AE prolongé, je dis que $\frac{BD}{DC}=\frac{\text{sinus AB}}{\text{sinus AC}}$.

Démonstration. Tirez BF, CH, perpendiculaires sur le diamètre AE; ces perpendiculaires seront les sinus des arcs AB, AC; les deux triangles DHC, DFB seront semblables comme ayant l'angle D commun, et les angles H, F, droits, et dès lors on aura $\frac{BD}{CD}=\frac{BF}{CH}$: rapport des deux sinus. C. Q. F. D.

C'est ce qui se passe aussi lorsque la rencontre de la corde et du diamètre a lieu du côté de E, ainsi que cela est



indiqué dans la figure. Que si la corde de la différence est parallèle au diamètre alors les lignes sinus des deux arcs, c. à. d. les perpendiculaires BF, CH sont égales, comme

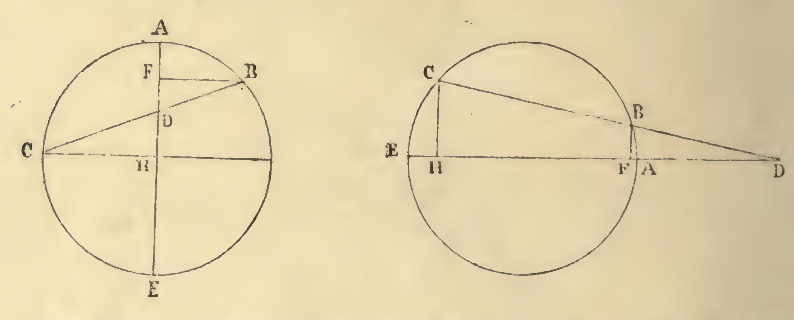


parallèles comprises entre parallèles et comme côtés opposés d'un même parallélogramme et à raison de l'égalité des sinus leurs arcs sont respectivement supplémentaires et comme si ils étaient égaux. Le cas analogue à celui-ci dans la figure première, celle où les deux arcs sont consécutifs, est celui où la somme des deux arcs est égale à une demi-circonférence; la corde de la somme devient alors égale à un diamètre et le premier diamètre (celui qui passe par l'extrêmité commune des deux arcs) est coupé au centre même; chacun des deux arcs devenant ainsi le supplément de l'autre.

Nous avons posé comme condition de l'énoncé l'inégalité des deux arcs, par la raison que s'ils étaient égaux et consécutifs, leurs sinus coincideraient avec la corde et que s'ils étaient superposés leurs sinus se confondraient, circonstances qui rendraient l'énoncé inapplicable, et dispenseraient même de toute démonstration.

On peut d'ailleurs réunir les deux propositions et les deux démonstrations en une seule au moyen de l'énoncé suivant: AB et AC sont deux arcs inégaux de la même circonférence ABC, qui ont une même exrêmité, le point A, mais dont les deux extrêmités B, C ne coincident pas. La corde BC rencontrant le diamètre AE en un point D, je dis que $\frac{BD}{DC} = \frac{\text{sinus AB}}{\text{sinus AC}}$.

Démonstration. Menez BF, CH, perpendiculaires sur le diamètre AE: ces deux lignes représentent les sinus, et l'on a deux triangles BFD, DCH, qui seront semblables: l'angle D étant égal et les deux angles F, H droits, ce qui amène $\frac{BD}{DC} = \frac{BF}{CH}$



Du reste il est évident que la différence entre les deux cas est celle que nous avons précédemment signalée entre le cas *explicite* et le cas *implicite*.

Apprenez aussi, que la condition que chaque arc soit moindre qu'une demi - circonférence n'est pas absolument nécessaire. Notre énoncé est vrai d'une manière absolue pourvu que les deux arcs aient des sinus. Que si tous les deux, ou l'un des deux n'ont pas de sinus, qu'il s'agisse de demi-circonférences, ou de circonférences complètes, l'énoncé ne saurait recevoir d'application.

D'ailleurs, des deux conditions sus-énoncées, l'une n'est pas nécessaire, dans les figures autres que celles ci-dessus

par la raison que dans la théorie du quadrilatère il s'agit toujours d'arcs moindres qu'une demi-circonférence, et que d'un autre côté dans la discussion des autres figures il y a lieu de distinguer les six cas suivants :

1°	Les deux arcs sont	$<$	qu'une	demi-circonférence
2°	„ „	$=$	„	„
3°	„ „	$>$	„	„
4°	L'un des deux arcs est	$<$	„	„
	L'autre est	$=$	„	„
5°	L'un des deux arcs est	$<$	„	„
	L'autre est	$>$	„	„
6°	L'un des deux arcs est	$>$	„	„
	L'autre est	$=$	„	„

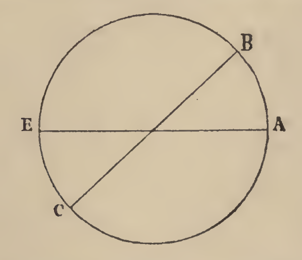
De ces six cas nous avons expliqué le 1°

Le 2° demeure exclu de la présente étude.

Le 3° se ramène au 1°. Car si dans la figure précédente nous prenons pour premier arc l'arc AEC et, pour second arc l'arc AEB, la figure aussi bien que la démonstration demeurent identiques aux précédentes.— En effet de deux choses l'une ; ou BC = corde de la différence des deux arcs, comme dans la 2nde figure et alors la chose est évidente ; ou bien BC = corde de la somme, comme dans la 1ère figure et nous retombons ainsi dans ce qui a été dit.

Le 4° et le 6° rentrent dans la catégorie du 2°.

Pour ce qui est du 5° on aura deux figures l'une pour



le cas implicite (superposition), l'autre pour le cas explicite

(juxtaposition) lesquels rentrent l'un dans l'autre. Ainsi dans le cas de juxtaposition si l'un des arcs est AB et l'autre l'arc AEC, l'extrémité de AB et le point C devant tomber nécessairement du même côté du diamètre, la corde ne peut rencontrer le diamètre que hors du cercle; et il en résulte une figure pareille à celle pour le cas de superposition: De même dans le cas de superposition si l'un des arcs est AB et l'autre AEC, les extrémités des deux arcs tombant de côté et d'autre du diamètre, la corde rencontre le diamètre dans l'intérieur du cercle et il en résulte une figure pareille à celle pour le cas de justaposition.

C'est tout ce que nous avions à dire là dessus.

CHAPITRE II.

Sur la manière de calculer les côtés et les angles d'un triangle les uns par les autres.

Tout triangle rectiligne étant inscriptible dans le cercle, chaque côté est la corde correspondant à l'angle du triangle. C'est pourquoi on considère chaque côté comme la corde de l'angle qui lui est opposé, ou plus exactement comme la corde de l'arc opposé à cet angle. Et comme les angles sont entre eux dans la proportion des arcs qui leur correspondent on évalue la grandeur des arcs à la place des angles, et l'on dit de la mesure de l'arc que c'est la mesure de l'angle qui lui correspond.

La circonférence de tout cercle est donc la mesure des trois angles de tout triangle et les astronomes l'on divisée en 360 parties égales. De même ils ont divisé le diamètre en 120 parties à l'exception de l'illustre Abou Rihan Albirouni, qui, lui, divise le diamètre en deux parties de 120

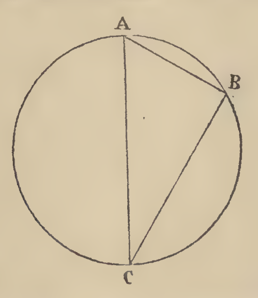
minutes dont le nombre concorde ainsi avec celui de l'autre division. Après quoi les astronomes ont donné les moyens de trouver les arcs, les cordes, et les sinus les uns par les autres, d'après les principes de la géométrie ainsi que cela est expliqué dans l'introduction de l'Almageste et dans d'autres livres.

Ceci entendu il nous faut ajouter, que dans les opérations astronomiques, aussi bien que dans l'étude des figures, il y a grande utilité à connaître la manière de trouver les uns par les autres les côtés et les angles de tout triangle rectangle rectiligne. Et comme dans toute recherche de ce genre, il est indispensable de connaître quelques unes de ces quantités pour en déduire les autres, on a établi dans ce but des règles fondées sur les *arcs et les cordes* ou bien sur les *arcs et les sinus*. Nous exposerons donc tout d'abord ce qui a trait aux *arcs et aux cordes* en commençant par les triangles rectangles.

Pour cela, il faut connaître un angle autre que l'angle droit, ou deux côtés, ou bien un côté et un angle autre que l'angle droit. De là trois cas à considérer:

I. — Si l'on ne connait qu'un angle autre que l'angle droit on trouvera le troisième angle, et le triangle sera déterminé quant à ses angles et leurs rapports, sans qu'on puisse néanmoins connaître la vraie grandeur de ces côtés.

II. — Si l'on donne deux côtés, on trouvera le 3ème en prenant la racine de la somme ou de la différence de deux



carrés et une fois les trois côtés déterminés on déterminera les trois angles aussi. Soit ABC un triangle rectangle inscrit; le

rapport de l'hypoténuse AC à AB sera égal au rapport de 120 parties représentant le diamètre à AB, selon la mesure d'après laquelle le diamètre est égal à 120. Ayant déterminé AB dans cette mesure, on aura trouvé aussi l'arc AB qui est la mesure de l'angle ACB. Dans ce cas ce qui restera de la demi-circonférence sera la valeur de l'angle BAC.(1)

III.— Si les données sont un angle et un côté, l'angle connu donnera l'angle inconnu et les cordes des angles, c. à d. les trois côtés seront dans la mesure d'après laquelle le côté opposé à l'angle droit, j'entends le diamètre, sera de 120; et le rapport du côté connu à un autre côté sera égal au rapport de la corde de l'angle qui a pour corde le côté connu, à la corde de l'angle qui a pour corde l'autre côté, selon la mesure d'après laquelle la corde opposée à l'angle droit est de 120. On connaîtra ainsi un autre côté du triangle et l'on procédera de même pour le 3ème.

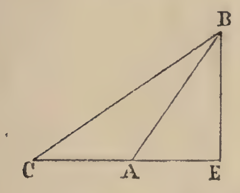
Pour les triangles non rectangles, si l'on connait seulement un côté ou deux côtés, ou un angle et un côté il est impossible d'en tirer autre chose. Pour cela il faudra connaître deux angles, deux angles et un côté, deux côtés et un angle, ou les trois côtés. Ce qui fait quatre cas à considérer.

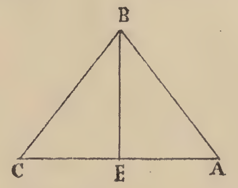
I.— On connait les deux angles. On en tirera le 3ème et l'on connaîtra les angles, selon la mesure d'après laquelle le diamètre est de 120. Le triangle sera ainsi défini quant à sa forme, sans que cependant on arrive à connaître la grandeur vraie de ses côtés.

II.— On donne deux angles et un côté. Dans ce cas le 3ème angle est connu ainsi que les trois cordes (tabulaires); et le rapport de la corde de l'angle opposé au côté connu à la corde de l'angle opposé au côté inconnu, selon la mesure d'après laquelle le diamètre est de 120, est égal

au rapport du côté connu, à l'autre côté. Ce dernier côté sera donc connu, et l'on procédera de même pour le 3ème côté.

III.– On donne deux côtés et un angle. Si cet angle est opposé à l'un des côtés donnés, le rapport de la corde (tabulaire) opposée à l'angle connu, à sa corde qui correspond au côté connu sera égal au rapport des deux côtés. Ceci fera connaître l'autre angle. On trouvera alors le 3ème angle et le 3ème côté aussi. Que si l'angle donné est compris entre les deux côtés donnés, comme l'angle A est compris entre les deux côtés AB AC, abaissez de B sur AC la perpendiculaire BE. Vous aurez ainsi le triangle rectangle

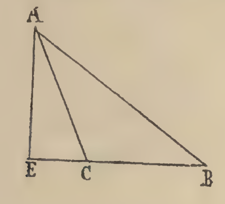


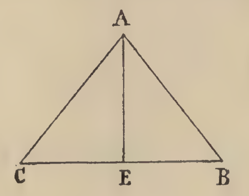


BEC dont nous connaissons le côté AB et l'angle A; on en tirera BE, EA, et l'on retombera ainsi dans un des cas précédents; c. à. d. dans le cas où BE, CE sont connus; on connaîtra dès lors BC et l'angle C, comme nous l'avons expliqué.

IV.— On donne les trois côtés du triangle ABC.

Nous calculerons la perpendiculaire selon la règle ordinaire; en prenant l'excédant entre les deux carrés de BA,





BC et le carré de AC, que nous diviserons par le double de BC; le quotient sera BE, et alors la racine de l'excédant du carré de AB sur le carré de BE, donnera la per-

pendiculaire. On aura ainsi deux triangles rectangles dont on pourra déterminer les angles, au moyen desquels on déterminera ensuite ceux du triangle ABC.

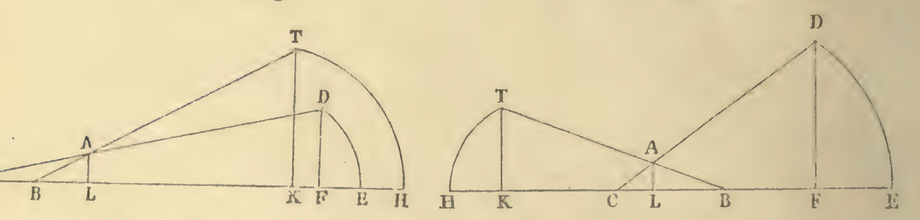
Voilà en quoi consiste la méthode des arcs et des cordes.

Quant à celle des *arcs et des sinus*, la notion fondamentale en est que le rapport des côtés est égal au rapport des sinus des angles opposés à ces côtés.—

Soit le triangle ABC, je dis que:

AB: AC:: sinus angle ACB; sinus angle ABC. (2).

Cas du triangle obtusangle. Cas du triangle acutangle.



Démonstration. Prolongez BC jusqu'à ce que CE=60 De C avec un rayon égal à CE décrivez ED et prolongez CA, jusqu'à sa rencontre avec cet arc en D. De D abaissez la perpendiculaire DF sur CE, DF=sin ACB. Prolongez également BC, jusqu'à ce que BH = 60. De B avec un rayon =BH décrivez HT qui sera coupé au point T, par le prolongement de AB. Abaissez la perpendiculaire TK, ce sera le sinus de l'angle ABC. De A abaissez AL perpendiculaire sur CE, vous aurez; AB:AL::TB (rayon): TK. (à cause de la similitude des triangles ABL, TBK,) et à cause de la similitude des triangles ALC, DFC,

AL: AC::DF: DC (rayon);d'où par la proportion réglée:

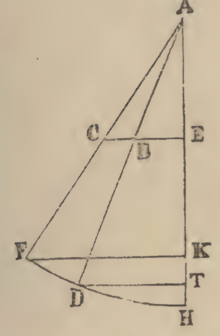
AB: AC::DF (sin ACB): TK (sin ABC) c. q. f. d.

Autrement :

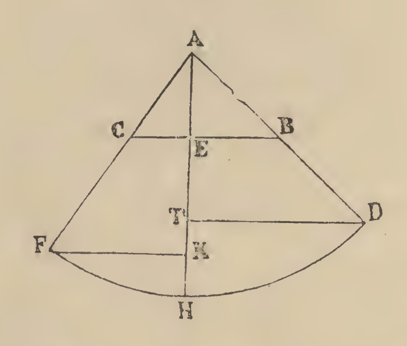
Abaissez AE perpendiculaire sur BC; prolongez AB, AC jusqu'à ce que AF=AD=60=R. Décrivez arc DH. Menez FK, TD perpendiculaires sur AH. Dans le triangle ABE

l'angle E étant droit, B sera le complément de A; DT = sin A ; AT = sin B. De même dans le triangle AEC, A + C = arc de demi-circonférence FK = sin A ; KA = sin C.

Cas du triangle obtusangle



Cas du triangle acutangle



Et à cause de la similitude des deux triangles ABE, ADT; AB : AE :: AD (rayon) : AT (sin. B); de même AE : AC :: AK (sin. C) : AF (rayon), à cause de la similitude des deux triangles, AEC, AKF, ce qui par l'égalité troublée nous donne AB : AC :: AK (sinus C) : AT (sinus B). C. Q. F. D.

Ces points ainsi élucidés je dis ce qui suit :

Comme les angles à la circonférence sont la moitié des angles au centre lorsqu'ils interceptent un même arc sur la circonférence et que l'angle droit au centre a pour mesure le quart de la circonférence, la mesure des trois angles d'un triangle est égale à une demi-circonférence et les sinus qui sont la moitié des cordes, lorsque nous en faisons usage pour la mesure des angles remplacent les cordes et ramènent les angles au centre. (3).

Ainsi s'agissant d'un triangle rectangle, si nous connaissons ses côtés, par la méthode des sinus, l'hypoténuse sera à l'un des côtés dans le rapport du rayon au sinus de l'angle opposé à ce côté et par le sinus on trouvera l'angle. Et si ce qui nous est donné est un angle et un côté nous

connaîtrons par là même les angles du triangle rectangle et le rapport du sinus de l'angle opposé au côté connu, au sinus de l'autre angle sera égal au rapport du côté donné à l'autre côté. Par là on connaîtra les côtés.

Pour ce qui est des autres triangles, si l'on connaît deux angles et un côté, on trouvera les deux autres côtés d'après ce que nous avons dit sur le triangle rectangle. Si les données sont deux côtés et un angle (non compris) le rapport du côté opposé à l'angle connu — à l'autre côté, sera égal au rapport du sinus de l'angle connu au sinus de l'angle opposé à l'autre côté. Et lorsque vous aurez connu les angles vous connaitrez aussi le côté restant. — Si l'angle était compris entre les deux côtés donnés on agira comme il a été dit. — Si les données consistent dans les trois côtés, trouvez d'abord la perpendiculaire comme il a été dit, après quoi, vous pourrez connaître les angles comme vous les trouveriez s'il se fût agi d'un triangle rectangle.

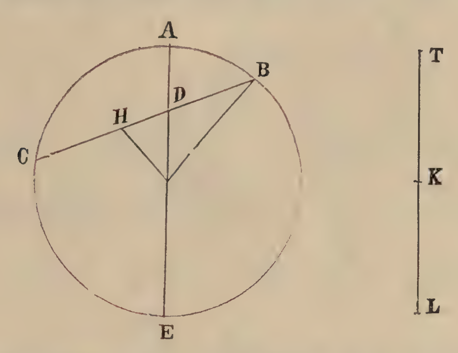
Ici se termine ce que nous avions à dire sur les triangles.

CHAPITRE III.

Règles dont la connaissance est très-utile dans la théorie du quadrilatère plan.

Si dans un même cercle l'on connaît la somme de deux arcs inégaux, consécutifs dont la somme soit moindre qu'une demi-circonférence et si l'on connaît en outre le rapport des sinus de ces deux arcs entre eux, on peut déterminer chacun de ces deux arcs.

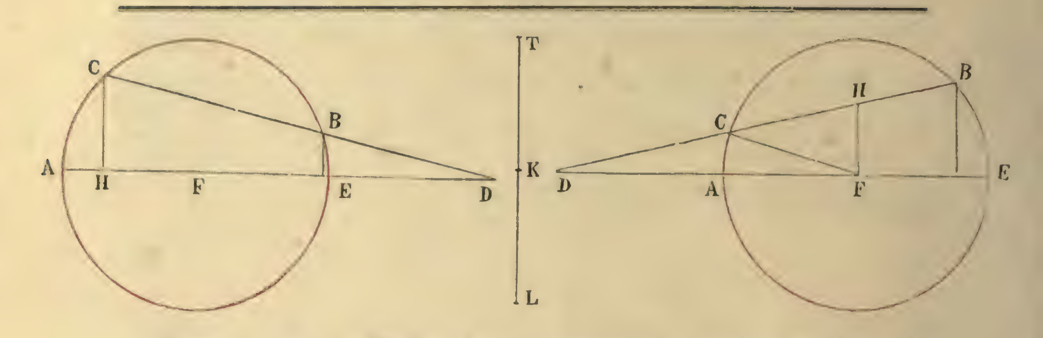
Soient dans le cercle ABC, deux arcs AB, AC dont les extrémités se touchent au point A: on donne leur somme BAC $< \frac{1}{2}$ circonférence, ainsi que le rapport $\frac{\sin AB}{\sin AC}$, je dis qu'on peut déterminer AB, AC.



Démonstration. Tirez la corde BC et le diamètre AE qui se coupent en D. Menez du centre, FH perpendiculaire sur CB, joignez BF. L'arc BAC étant connu on connaît aussi la corde BC; $\frac{\sin AB}{\sin AC}$ étant connu on connaît aussi $\frac{DB}{DC}$ que nous supposerons égal à $\frac{TK}{KL}$.

On en tire: $\frac{DB+DC=BC}{DB} = \frac{TK+KL=TL}{TK}$. DB, BC, BH $(\frac{BC}{2})$ et par conséquent DH et FH (cosinus de la moitié de l'arc BAC) sont ainsi des lignes connues. Maintenant dans le triangle rectangle DHF on connaît les deux côtés de l'angle droit et par conséquent l'angle DFH. D'ailleurs BFH (qui correspond à la moitié de l'arc BC) est connu. On arrive ainsi à déterminer l'angle BFA, qui correspond à l'arc BA, et dès lors l'arc AB lui-même. C. Q. F. D.

De même, soient pris dans le cercle ACB, les deux arcs AC, ACB, tels que nous venons de les définir, ayant A pour extrémité commune; et soit arc BC = ACB — AC, connu, ainsi que $\frac{\sin AB}{\sin AC}$, je dis qu'on peut arriver à déterminer chacun des deux arcs AC, AB.



Démonstration. Faites la construction indiquée dans la figure; BC, $HC = \frac{BC}{2}$ sont connus; $\frac{\sin AB}{\sin AC} = \frac{TL}{KL} = \frac{BD}{CD}$ et par conséquent $\frac{BC}{CD} = \frac{TK}{KL}$. Par là on connaîtra DC et HD; on connaît aussi HF = cosinus de $\frac{BC}{2}$. Dans le triangle rectangle HFD, on connaît ainsi les deux côtés HD, HF, et par conséquent l'angle HFD, et aussi l'angle HFC qui a pour mesure la moitié de l'arc commun BC. Par là on arrivera à connaître l'angle CFA, ainsi que l'arc AC. C. Q. F. D. (4)

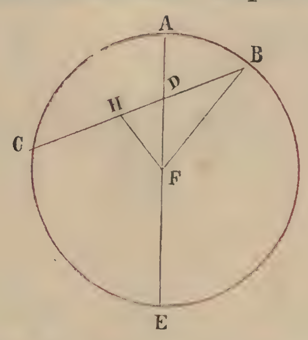
Si $\sin AB > \sin AC$, on a l'intersection du côté de A; mais si $\sin AB < \sin AC$, on aura l'intersection du côté de E.

Si les sinus sont égaux, la corde sera parallèle au diamètre.

Etablissement du calcul sans démonstration pour le premier cas.

Multipliez le sinus de la demi-somme des deux arcs (BH) par le plus grand des deux termes du rapport donné; — divisez le produit par la somme des deux termes et doublez le quotient, vous aurez DC. Retranchez-en le sinus de la demi-somme des deux arcs; la différence que nous appelons *la retenue* sera la ligne DH. Prenez la racine carrée de la somme du carré de la retenue et du carré du cosinus de la demi-somme des deux arcs (FH); multipliez *la retenue*

par 60 et divisez ce produit par la racine (DF); cherchez-en ensuite l'arc dans la table des sinus; augmentez cet arc (angle DFH) de la demi-somme des arcs, ce que vous obtiendrez ainsi sera le plus grand arc AC; retranchez cet arc de la somme et vous aurez le plus petit. (5).



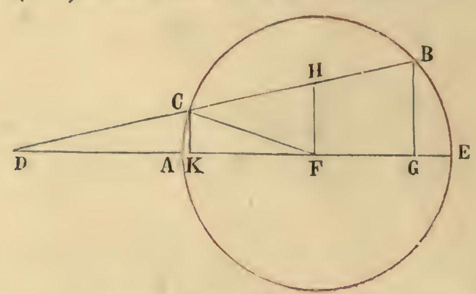
Dans cette opération nous supposons que la somme des deux arcs est moindre que la demi-circonférence, par la raison que c'est le cas qui se présente le plus souvent en astronomie. Cependant, si l'on suppose que la somme des deux arcs est moindre que la circonférence et que chacun des deux arcs est moindre que la démi-circonférence, retranchez chacun d'eux de la demi-circonférence, alors ce qui restera après la soustraction du plus grand arc sera le plus petit, et ce qui restera après la soustraction du plus petit, sera le plus grand et vous aurez ainsi ce que vous cherchez. Que si la somme des deux arcs est égale à la demi-circonférence ou à la circonférence entière, vous ne parviendrez pas à connaître les deux arcs par ce procédé. (6).

Etablissement du calcul pour le second cas.

(On connaît le rapport des sinus et la différence des arcs).

Multipliez HC le sinus de la demi-différence des deux arcs, par le plus grand des deux termes du rapport donné, et divisez le produit par la différence des deux termes du rapport: doublez le quotient, vous aurez BD. Retranchez-

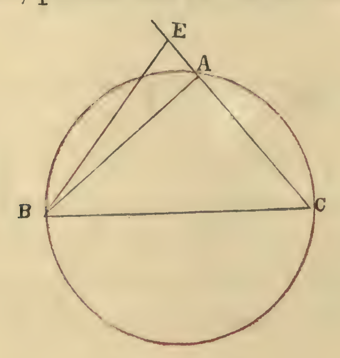
en le sinus de la demi-différence. Ce qui restera, HD, nous l'appellerons la retenue; prenez la racine carrée de la somme du carré de la retenue et du carré du cosinus de la demi-différence, multipliez la retenue par 60 et divisez par la racine (DF). Cherchez l'arc correspondant dans la table



des sinus, vous aurez l'angle HFD; ajoutez-y la demi différence, le résultat sera le plus grand arc BCA; retranchez en la différence, le résultat vous donnera le plus petit arc AC, et le calcul se terminera ici, si le sinus du plus grand arc est plus grand que le sinus du plus petit. Dans le cas contraire, nous en prenons les suppléments. Que si les deux sinus sont égaux, c. à. d. si les deux termes du rapport sont égaux nous n'avons plus besoin de ce calcul, car alors nous prenons la moitié du supplément de la différence et ce sera le plus petit arc. (7).

Autre procédé de l'Emir Abou-Nasr-Ben-Irak.

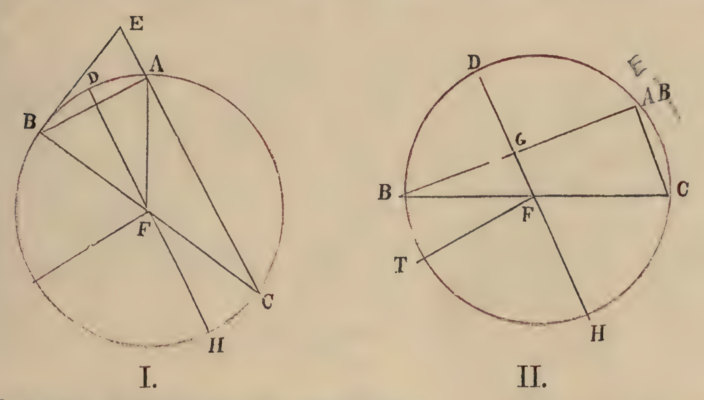
Tracez un cercle; prenez sur ce cercle deux arcs AC, CB,



doubles des arcs inconnus, dont on connaît pourtant la somme ainsi que les rapports des sinus; ou bien si les deux arcs ABC, BC, sont les arcs doubles de ceux qui doivent être retranchés l'un de l'autre, on connaît que leur différence est la moitié de l'arc AB et que leurs sinus sont dans un certain rapport. Menons les cordes AB, BC, CA. On connaît AB c. à. d. la corde de l'arc double de la somme des deux arcs cherchés ou bien la corde de leur différence. On ne connaît pas les cordes AC, CB c. à. d. les cordes des deux arcs inconnus. Du point B menez sur la corde AC, la perpendiculaire BE; il y aura cinq cas à considérer selon que la perpendiculaire tombera:

1° Hors du triangle du côté de A.

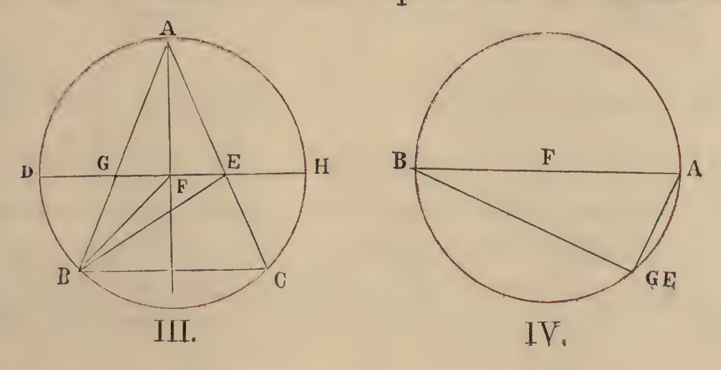
2° Sur la droite AB avec laquelle elle se confondra.



I. II.

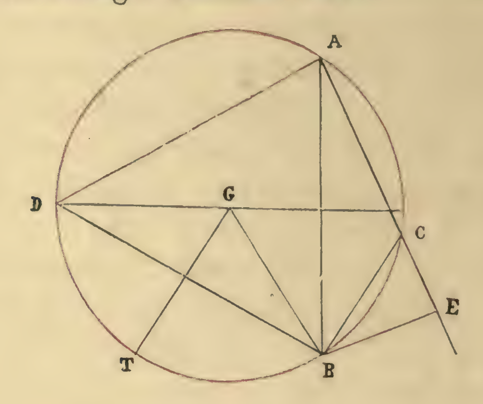
3° Dans l'intérieur du triangle.

4° Sur la droite BC avec laquelle elle se confondra.



III. IV.

5° Hors du triangle au-delà de C.



Dans tous ces cas dans le triangle rectangle BEC, les deux côtés BE, CE, seront connus selon la mesure d'après laquelle $BC = 60$; et comme on connaît le rapport $\frac{BC}{AC}$ on connaîtra aussi AC d'après cette mesure. Donc AE sera connu; et de AE, EB qui comprennent l'angle droit on tirera AB selon la mesure d'après laquelle $BC = 60$. Car l'angle $BCE = BCA$ est connu du moment que l'arc AB est connu. La connaissance de la corde AB fera ainsi connaître BC et du moment qu'on connaîtra la corde BC on connaîtra aussi l'arc BC.

Manière dont ce géomètre établit son calcul pour le 1er cas.

Multipliez par 60 (BC) le conséquent du rapport donné (correspondant à la ligne AC); divisez par l'antécédent (qui correspond à BC. c. à. d. qu'on a $\frac{BC}{AC} = \frac{M}{N}$). C'est ce que nous appellerons le *produit du conséquent*. Si la somme des deux arcs est $< \frac{1}{4}$ circonf. (fig. 5) augmentez le *produit du conséquent* du cosinus de la somme des deux arcs (ligne CE). Nous appellerons cette quantité la *retenue* (ligne AE).

Que si la somme des deux arcs $> \frac{1}{4}$ circonf. (fig. 1. 2. 3.) prenez la différence entre le *produit du conséquent* et le cosinus de la somme (CE) ce qui constituera la retenue (AE). Ajoutez le carré de la retenue (AE) au carré du sinus (EB) de la somme des deux arcs et prenez-en la racine. Divisez par cette racine le produit du sinus de la somme des deux arcs (BE) par 60, et cherchez l'arc dans la table des sinus. Maintenant si l'excès est du côté du produit du conséquent comme dans la fig. 3, alors cet arc sera l'arc cherché $\left(\frac{\text{arc BAC}}{2}\right)$, et c'est celui qui correspond au terme antécédent du rapport. Que si l'excès est du côté du cosinus de la somme de deux arcs (fig. 1.) cet arc sera le supplément de l'arc cherché $\left(\frac{\text{BAC}}{2}\right)$. S'il y a égalité, comme dans la fig. 2, alors l'arc demandé qui correspond à l'antécédent est le quadrant. Et si la somme des deux arcs (ACB) $=$ un quadrant (fig. 4.), prenez la racine de la somme des deux carrés de l'antécédent et du conséquent (CB, CA) divisez par cette racine le produit de l'antécédent par 60 (le rayon) et trouvez l'arc dans la table des sinus; l'arc ainsi obtenu sera l'arc demandé $\left(\frac{\text{BC}}{2}\right)$ qui correspondra à l'antécédent. L'opération sera ainsi terminée.

Etablissement du calcul pour le 2nd cas.

Multipliez le conséquent du rapport donné (qui correspond à la ligne AC) par 60(le rayon $=$ BC) et divisez-le par l'antécédent (qui correspond à la ligne BC), à la condition que l'antécédent correspondra au plus petit arc (arc CB). C'est le *produit du conséquent.* Après quoi, si l'excès de l'arc est plus grand qu'un quadrant (fig. 5) ajoutez le produit du conséquent (ligne AC) et le cosinus de l'excès (ligne

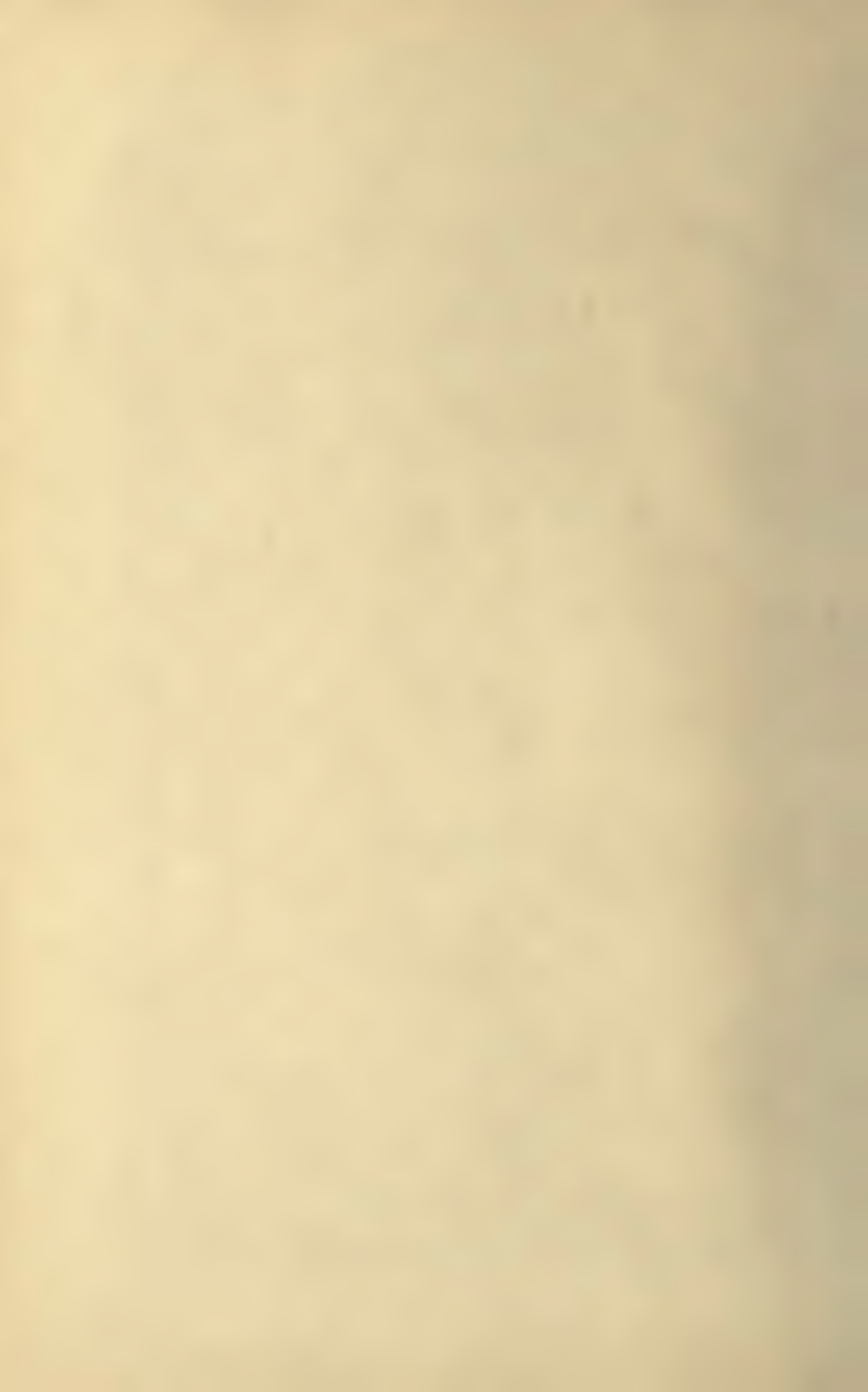
CE). C'est ce que j'appellerai la retenue (ligne AE). Que si l'excès de l'arc $(\frac{\text{arc AB}}{2})$ est $<$ quadrant. (fig. 1. 2. 3.) nous prenons la différence entre le produit du conséquent (ligne AC) et le cosinus de l'excès (ligne CE); ce sera la retenue (ligne AE). Maintenant nous prenons la racine carrée de la somme du carré de la retenue (ligne AE) et du carré du sinus de l'excès (ligne EB) et nous divisons par cette racine le produit de la multiplication du sinus de l'excès (ligne EB) par 60; le résultat sera un sinus dont nous trouverons l'arc, arc qui sera ou bien l'arc connu $(\frac{\text{arc BAC}}{2})$, correspondant à l'antécédent, le petit arc, fig. 3. où la différence est du côté du produit du conséquent — ou bien le supplément du petit arc $(\frac{\text{arc BAC}}{2})$. fig 1. où la différence est du côté du cosinus de l'excès. Que si le produit du conséquent et le cosinus de l'excès sont égaux, comme dans la fig. 2. alors le petit arc correspondant à l'antécédent est égal à un quadrant. Et si l'excès des deux arcs est égal à un quadrant comme dans la fig 4. nous prenons la racine de la somme des carrés de l'antécédent et du conséquent et nous divisons par cette racine (correspondant à AB) le produit de la multiplication de l'antécédent par 60. (rayon). Le résultat sera le sinus du petit arc (arc BC) et l'opération sera terminée.

Ce cas, c. à. d. le cas où la somme des deux arcs ou leur différence est un quart de cercle, est très fréquent dans les opérations astronomiques. On peut aussi suivre une autre voie et dire:

Du moment où le rapport de l'antécédent au conséquent est égal à celui du sinus d'un arc à son cosinus, le rapport du carré de l'antécédent à celui du conséquent sera comme le rapport du carré du sinus au carré de son cosinus et *componendo:* le rapport de la somme des deux car-

rés de l'antécédent et du conséquent au carré de l'un d'eux sera égal au rapport de la somme des carrés du sinus et du cosinus c. à. d. au carré du rayon à l'un des deux carrés; et le rapport de la racine de la somme des deux carrés du conséquent et de l'antécédent à l'antécédent ou au conséquent sera égal au rapport du rayon au sinus ou au cosinus de cet arc. L'opération a lieu comme ci-dessus, et son utilité consiste en ce que on peut ainsi parvenir à connaître le sinus d'un arc qui est l'un des deux arcs dont ou connaît la somme ou la différence. La figure du quadrilatère, ainsi qu'on verra plus bas, permet d'établir le rapport des deux sinus entre eux et alors on trouvera l'inconnue par la voie même que nous venons d'indiquer dans ce chapitre.





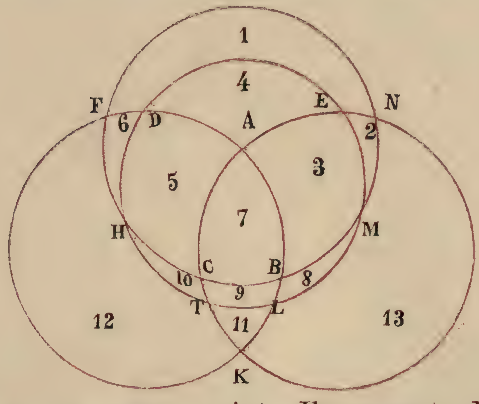
LIVRE IV.

DU QUADRILATÈRE SPHÉRIQUE ET DES RAPPORTS QU'ON Y DECOUVRE.

CHAPITRE I.

En quoi consiste le quadrilatère sphérique.—Indications quant à la discussion des rapports qu'on y trouve.

Soient ABKF, BCFN, ACKN, EDTL, quatre grands cercles de la surface d'une sphère, dont pas plus de deux ne

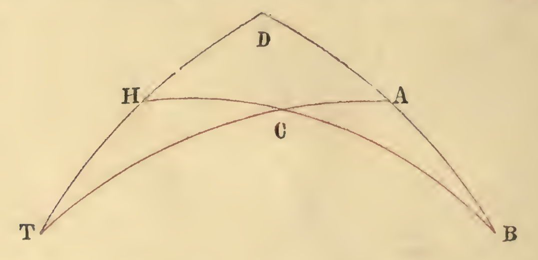


se coupent en un même point. Ils auront douze points communs A, B, C, D, E, F, H, K, L, M, N, T, et chaque cercle sera partagé en 6 arcs, dont chacun constituera un côté de la figure. On aura ainsi 24 arcs en tout, et la surface de la sphère sera partagée en 14 parties; six quadrilatères (1, 3, 5, 9, 12, 13) et huit triangles (2, 4, 6, 7, 8.10,11,14=NKF) Chaque arc sert à la fois de côté à un quadrilatère et à un triangle, et chaque angle a pour opposé par le sommet un angle d'une autre figure de même espèce. On voit sur la figure que les angles formés autour du point A, p. e. ap-

partiennent deux à deux, à deux triangles ACB, ADE, et à deux quadrilatères ABEM, ACHD. Chaque quadrilatère aura ainsi ses quatre côtés égaux à quatre côtés de quatre triangles, et ses quatre angles égaux à quatre angles de quatre quadrilatères, tandis que chaque triangle aura ses côtés égaux à des côtés de quadrilatères et ses angles égaux à des angles de triangles.

Chaque quadrilatère pris avec les deux triangles placés sur deux de ses côtés consécutifs formera un *quadrilatère complet*; la figure ainsi formée comprenant quatre *colonnes* (grands côtés) dont chacune est coupée sur trois points (ce qui donnera douze arcs trois par trois sur chaque colonne) et quatre triangles chacun formé de trois lignes, ainsi que cela a été expliqué.

La figure formée, comme il vient d'être dit, par un quadrilatère et deux triangles, c'est ce que nous appelons *quadrilatère sphérique complet.*



Ainsi le quadrilatère ADCH, avec les deux triangles ABC, CHT, situés sur les côtés consécutifs AC, CH de ce même quadrilatère, nous donne un quadrilatère sphérique complet, pareil au quadrilatère plan, si ce n'est que les droites sont remplacées par des arcs de grands cercles.

Tout quadrilatère donne ainsi naissance à quatre figures de *quadrilatère sphérique complet.* Par exemple, le quadrilatère ADCH, pris avec les triangles (ABC, CHT), (ABC, AED), (AED, DHF), (DHF, HCT) forme successivement quatre figures de *quadrilatère sphérique complet;* et comme l'intersection de quatre cercles donne, comme on le voit, six

quadrilatères, il y aura en tout 24 figures de quadrilatère sphérique complet sur la surface de la sphère. Ces figures seront égales ou correspondantes les unes aux autres. La figure MNFDAE, p. e. est égale ou correspondante à la figure KLBCHT. En effet la *colonne* (grand côté) MNF du 1er quadrilataire sphérique complet est égale à la *colonne* (grand côté) HCB du 2nd quadrilatère sphérique complet, par la raison que MNFH et FHCB sont des demi-circonférences, (ainsi que cela est établi dans la proposition XII du Livre 1 de Théodose d'après laquelle deux grands cercles se coupent toujours en deux parties égales); de sorte que retranchant de part et d'autre l'arc FH, on aura MNF=HCB. De même MED=HTL; ADF=KLB; AEN=KTC On démontrera également que les deux côtés des deux triangles correspondants des deux quadrilatères sphériques complets, ainsi que leurs quadrilatères sont égaux, et que les angles correspondants sont égaux. Par là il demeure démontré que des 24 quadrilatères sphériques complets les 12, correspondent aux 12 autres.

Quant aux rapports dérivant du quadrilatère plan et qui sont développés dans la discussion des *trois* propositions de notre Livre II^e ils se vérifient tous ici entre les sinus des arcs des quadrilatères sphériques complets tels quels et sans aucune différence, circonstance qui nous dispensera de revenir ici sur des explications et des démonstrations que nous avons déjà fournies.

CHAPITRE II.

Indication générale de la démonstration — et démonstration de la proposition de la 1ère espèce connue sous le nom de rapport explicite de Ptolémée. (1)

Nous appliquerons tout d'abord la démonstration à la proposition ordonnée de la première espèce, et nous nous

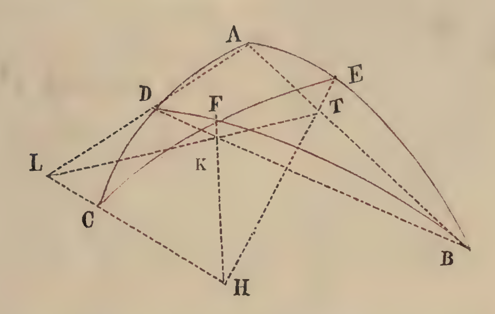
(1) V. Livre II. Chapitre X.

servirons de ce que nous en aurons dit pour les autres propositions.

Lorsque nous voulons démontrer que le rapport des sinus de deux arcs du quadrilatère sphérique est composé de deux rapports fournis par les sinus des quatre autres arcs, de sorte que ces six arcs donnent naissance entre leurs sinus à un rapport ordonné de la première espèce, nous devons déterminer en premier lieu, quels sont la colonne et le triangle inactifs, comme nous l'avons fait précédemment aussi. Après quoi, nous joignons par des droites les sommets des angles du triangle inactif, en d'autres termes nous menons les cordes des arcs qui constituent le triangle, et aussi trois droites qui partant du centre de la sphère aboutissent aux trois points situés sur la colonne inactive, lesquelles droites seront des rayons et rencontreront nécessairement les trois cordes du triangle inactif de manière que chaque rayon coupe la corde de l'arc sur lequel se trouve le point où il (*le rayon*) aboutit. Ces trois intersections des rayons avec les cordes seront situées dans le plan du triangle déterminé par les trois cordes du triangle inactif et le plan du grand cercle auquel appartient l'arc de la colonne inactive; en d'autres termes, les trois points en question seront situés sur l'intersection de ces deux plans. Or Euclide démontre dans ses Eléments, que l'intersection de deux plans ne peut être qu'une ligne droite. En conséquence les trois points aussi seront situés sur une même droite; et cette droite formera avec les trois cordes du triangle inactif, un quadrilatère plan, dont les relations et les propriétés serviront à démontrer celles du quadrilatère sphérique, moyennant ce qui a été établi dans notre Livre III^{ème}. S'il arrivait qu'une de ces trois cordes fût parallèle à l'un des rayons qui entrent dans la question, il y aurait lieu à un rapport composé formé ou bien d'un rapport égal au rapport composé lui-même

et d'un rapport d'identité, ou bien d'un autre rapport et de son inverse, ainsi que nous allons le démontrer.

Soit un quadrilatère sphérique déterminé par les 6 points ABCDEF.



Le rapport explicite de Ptolémée revient comme on l'a vu à la proposition ordonnée de la 1ère espèce et je dis qu'on aura toujours $\frac{\sin BE}{\sin EA} = \frac{\sin BF}{\sin FD} \times \frac{\sin DC}{\sin CA}$.

Ici l'arc EFC sera la colonne inactive ; — ABD, le triangle inactif.

Tirons les droites AB, AD, DB ; ce seront les cordes du triangle ABD.

Soit H le centre de la sphère ; par ce point menons aux trois points, C, E, F, de la colonne inactive les rayons HC, HE, HF — ces trois rayons se trouveront dans les plans des cercles qui fournissent les arcs du triangle inactif, dans lesquels plans se trouveront aussi respectivement les cordes de ces mêmes arcs. — Par conséquent : HE et la corde AB se rencontreront dans le plan du cercle BEA = au point T. p. e ; de même HF et la corde BD qui sont dans le plan du cercle BFD, se rencontreront au point K. p. e. Quant au rayon HC et à la corde AD, qui sont situés dans le plan du cercle ADC, il arrivera qu'étant prolongés ils se rencontreront, ou bien qu'ils seront parallèles Supposons en premier lieu qu'ils se coupent.

A. Les deux lignes HC et AD se coupent.

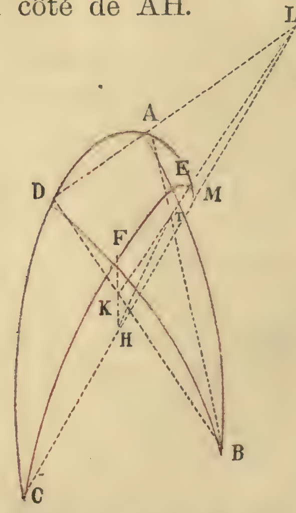
Dans ce cas ces deux lignes pourront se couper du côté de CD ou bien du côté de DA. De là deux hypothèses:

1ère *hypothèse.* Les deux lignes HC et AD se coupent du côté de CD au point L, p. e. Dans ce cas, les points T, K, L seront situés dans le plan du triangle BAD formé par les cordes du triangle inactif et aussi dans le plan du cercle EFC qui est aussi celui des trois rayons; donc ces trois ponts T, K, L, se trouveront juste sur l'intersection de ces deux plans, c. à. d. sur la droite TKL, laquelle avec les trois cordes donnera naissance au quadrilatère plan BTADLK; et dans celui-ci on aura ainsi qu'il a été expliqué:

$\frac{BT}{TA}=\frac{BK}{KD}\times\frac{DL}{LA}$. Mais $\frac{BT}{TA}=\frac{\sin BE}{\sin EA}$; $\frac{BK}{KD}=\frac{\sin BF}{\sin FD}$; — $\frac{DL}{LA}=\frac{\sin DC}{\sin CA}$, comme cela a été établi dans notre Livre IIIème (1)

d'où remplaçant les rapports $\frac{BT}{TA}$, $\frac{BK}{KD}$, $\frac{DL}{LA}$, par leurs égaux, on obtient $\frac{\sin BE}{\sin EA}=\frac{\sin BF}{\sin FD}\times\frac{\sin DC}{\sin CA}$. c. q. f. d.

2ème *hypothèse.* La rencontre de la corde AD avec le rayon HC, a lieu du côté de AH.

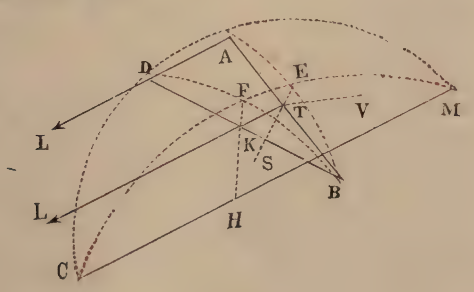


Dans ce cas il faut recourir à un autre quadrilatère

de ceux que l'on peut former sur la surface de la sphère et reporter à ce nouveau quadrilatère tout ce que nous avons dit jusqu'ici. A cet effet nous prolongeons les arcs CDA, CFE, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de l'autre côté au point M, de manière que CDM, CFM, soient des demi-circonférences, d'après ce qui est établi dans le Livre I. des Sphériques de Théodose. Maintenant, lorsque nous aurons prolongé le rayon CH aussi au delà du point M, il rencontrera la corde DA en L, les trois points K, T, L, se trouveront encore sur une même ligne droite, intersection du plan du cercle EFC de la colonne inactive, avec le plan ABD, des cordes du triangle inactif et l'on aura aussi le quadrilatère BKDALT, dans lequel:
$\frac{BT}{TA}=\frac{BK}{KD}\times\frac{DL}{LA}$, égalité qui peut être remplacée par la suivante $\frac{\sin BE}{\sin EA}=\frac{\sin BF}{\sin FD}\times\frac{\sin DM}{\sin MA}$. Mais dans le quadrilatère primitif les arcs DM et DC, AM et AC étant supplémentaires on aura : $\sin DM=\sin DC$, et $\sin AM=\sin AC$; d'où remplaçant dans l'égalité de tout à l'heure on a, comme dans la 1ère hypothèse, $\frac{\sin BE}{\sin EA}=\frac{\sin BF}{\sin FD}\times\frac{\sin DC}{\sin CA}$. c. q. f. d.

B. Les deux lignes HC et AD sont parallèles.

Dans les deux hypothèses que nous venons de traiter la corde AD rencontrait le rayon HC; que si la corde AD et le rayon HC se trouvent être parallèles, complétons les demi-circonférences MAC, MFC comme il a été dit et menons le diamètre MC.



Je dis que TK et le diamètre MC qui se trouvent dans le plan du cercle MEC sont parallèles. S'ils ne l'étaient pas, ils se rencontreraient en quelque point L. Alors les trois points L, A, D se trouveraient à la fois dans le plan du triangle BAD et aussi dans celui du cercle MAC, LAD serait une ligne droite et les deux lignes DA, CM, se rencontreraient en L. Ce qui est contraire à l'hypothèse d'après laquelle DA, CM sont parallèles. Donc TK sera parallèle au diamètre CM, et par conséquent à AD aussi. *(Autrement).* Si TK n'est pas parallèle au diamètre MC et à la corde AD, menons du point T, dans le plan du triangle ABD, TS parallèle à AD, et aussi dans le plan du cercle MFC, TV parallèle à MC; alors TV et AD étant parallèles à MC seront aussi parallèles entre elles; TV, et TS parallèles à AD seront également parallèles entre elles; tandis qu'elles concourent au point T Donc enfin TK est parallèle à la corde AD. Or, dans le triangle BAD, $\frac{BT}{TA} = \frac{BK}{KD}$.

Mais, $\frac{\sin BE}{\sin EA} = \frac{BT}{TA}$, $\frac{\sin BF}{\sin FD} = \frac{BK}{KD}$. d'où $\frac{\sin BE}{\sin EA} = \frac{\sin BF}{\sin FD}$.

D'ailleurs $\sin AC = \sin CD$ — car AD étant parallèle à MC, les perpendiculaires abaissées de A et D sur MC et qui constituent les sinus respectifs des arcs AC, CD sont égales — donc on pourra écrire cette fois-ci encore $\frac{\sin BE}{\sin EA} = \frac{\sin BF}{\sin FD} \times \frac{\sin AC}{\sin CD}$ (ce dernier rapport étant un rapport d'identité). c. q. f. d.

Et voilà comment le rapport en question se trouve composé dans toutes ces hypothèses des deux rapports sus-indiqués.

Dans tous les cas qui se ramènent à la proposition de la 1ère espèce toutes les fois que l'on aura pour colonne inactive l'arc EFC, et pour triangle inactif, le triangle BAD, la figure sera disposée comme il vient d'être dit et la démonstration aura lieu en conséquence. Et aussi toutes les

fois que l'on aura pour colonne inactive l'arc BFD et pour triangle inactif, le triangle CEA, la différence consistera en un simple changement de côtés. Quant à la figure et à la démonstration, elles restent absolument les mêmes.

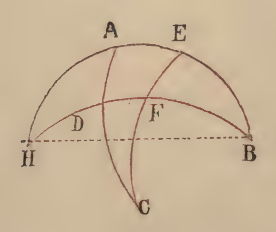
Mais nous croyons préférable de ne pas nous engager dans les détails à ce sujet.

CHAPITRE III.

Démonstration de la proposition connue sous le nom de rapport implicite de Ptolémée.

Pour ce qui est du rapport implicite et de sa démonstration, Ptolémée se borne à prolonger deux des colonnes du quadrilatère qu'il s'est proposé, jusqu'à compléter deux demi-circonférences. De la sorte il forme un nouveau quadrilatère au moyen duquel et de la démonstration du rapport explicite, il prouve ensuite la proposition concernant le rapport implicite.

Ainsi soit ACFB le quadrilatère proposé, le rapport implicite consistera à poser $\frac{\sin BA}{\sin AE} = \frac{\sin BD}{\sin DF} \times \frac{\sin FC}{\sin CE}$.



Démonstration. Prolongez chacune des colonnes BA, BD jusqu'à ce qu'elles se coupent, de manière à compléter les

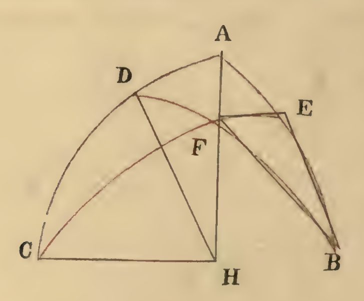
demi-circonférences BAH, ADH. D'après ce qui a été démontré au chapitre précédent on aura dans le quadrilatère CEHD, ainsi formé: (rapport explicite).

$\frac{\sin HA}{\sin AE} = \frac{\sin HD}{\sin DF} \times \frac{\sin FC}{\sin CE}$. Mais $\sin HA = \sin BA$; $\sin HD = \sin DB$; donc $\frac{\sin BA}{\sin AE} = \frac{\sin DB}{\sin DF} \times \frac{\sin FC}{\sin CE}$ c. q. f. d.

Ici la démonstration s'applique bien à l'hypothèse. Comme toutefois le but qu'on s'est proposé dans ce traité est de comprendre tous les genres de propositions et de démonstrations qui ont trait à cette figure, et d'en épuiser toutes les variétés, nous croyons de notre devoir d'apporter des démonstrations plus conformes à l'uniformité des principes qui doivent prédominer dans un travail systématique de manière que tout ce que nous dirons de cette figure, constitue un tout complet et bien proportionné dans toutes ses parties. (1)

Ainsi que Dieu nous soit en aide.

La proposition implicite consistant dans le rapport composé des sinus des arcs BA, AE, on aura comme colonne



inactive l'arc ADC et comme triangle inactif, le triangle FEB; - menez les cordes FE, EB, FB et les trois rayons

(1) En d'autres termes, la démonstration de Ptolémée ne tenant pas compte ni de la colonne et du triangle inactifs, ni de la rencontre des rayons avec les cordes, ni des autres circonstances que notre auteur a prises comme bases de son argumentation aussi bien dans la théorie générale exposée dans le Livre IIème que dans le chapitre précédent, cette démonstration de Ptolémée, disons-nous, doit-être remplacée par une autre conforme aux procédés analytiques qui ont été suivis jusqu'ici.

HC, HD, HA. Le principe général qui régit la démonstration amène à conclure que (V. chapitre précédent)

la corde BE rencontre le rayon AH
» » BF » » » HD
» » EF » » » HC

de manière à ce qu'un quadrilatère plan soit ainsi formé. Or, eu égard à la situation de chaque corde par rapport au rayon qu'elle doit rencontrer, on peut admettre trois hypothèses, selon que la corde 1° rencontre le rayon dans l'espace compris entre les rayons; 2° rencontre le rayon du côté du centre; 3° ne rencontre pas le rayon auquel elle se trouve être parallèle; et comme il y a ici trois cordes, les cas à considérer s'élèvent ainsi à $3 \times 3 \times 3 = 27$, sauf que ces cas ne sont pas tous également possibles.

En effet la rencontre de la corde BE avec le rayon AH a lieu du côté de A lorsque sin AB $>$ sin AE, et elle a lieu au contraire du côté de B lorsque sin AB $<$ sin AE; enfin les deux lignes sont parallèles lorsque les deux sinus sont égaux, et il en sera de même pour les deux autres cordes. Maintenant parmi les 27 cas, auxquels nous venons de faire allusion, il y aurait aussi à compter celui où:

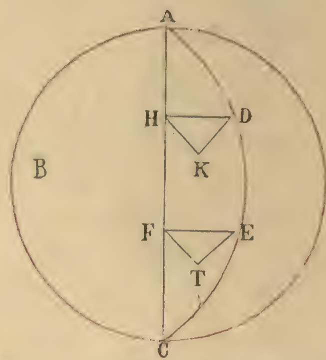
BE rencontre le rayon correspondant du côté de E
EF » » » » » » » F
FB » » » » » » » B

or, c'est bien là un cas impossible; il faudrait en effet pour cela que la distance du point B au plan du cercle ADC fût plus grande que quelque chose qui est plus grande qu'elle-même.

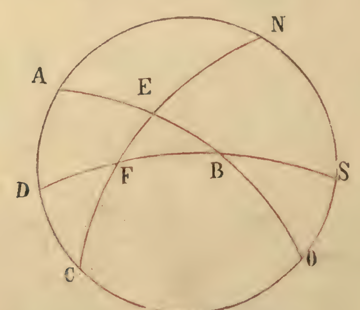
Pour bien comprendre ce point une explication préliminaire nous paraît nécessaire.

Soit AB un grand cercle de la surface d'une sphère, coupé par un grand cercle AEC pas à angles droits et soient AD, AE deux arcs ayant des sinus différents tels que le sinus de AE p. e. soit plus grand que le sinus de

AD (1), je dis que la distance du point E au plan du cercle ABC est plus grande que la distance du point D à ce même plan.



Démonstration. Menons AC qui représentera l'intersection des deux cercles; des points D, E, abaissez sur cette ligne les perpendiculaires HD, FE, qui seront dès lors parallèles; et de ces mêmes points menez encore perpendiculaires au plan du cercle ABC les droites DK, ET, qui seront également parallèles. Les angles HDK, FET seront égaux à cause du parallélisme de leurs côtés. Joignez maintenant HK, FT, vous aurez deux triangles semblables HKD et FTE. Mais EF $>$ HD donc aussi ET $>$ DK, c. à d. que la distance du point E au plan du cercle ABC $>$ que la distance du point D à ce meme plan. C. Q. F. D.



Revenons à notre figure; complétons le cercle de la colonne inactive et prolongeons les trois côtés du triangle

(1) ABC, AEC sont deux grands cercles qui se coupent, par conséquent AC sera un diamètre et EF et DH seront les sinus des arcs AD, AE.

inactif jusqu'à leur rencontre avec ce cercle aux points N, S, O. Si la rencontre entre la corde BE et le rayon correspondant a lieu du côté de E la distance du point B au plan du cercle ACN > que celle de E à ce même plan. (1) Si la rencontre entre la corde EF et le rayon correspondant a lieu du côté de F, la distance du point E > distance du point F; et à fortiori distance de B > distance de F. Ces hypothèses demeurant les mêmes, si l'on disait que la rencontre de la corde FB avec le rayon correspondant aurait lieu du côté de B, la distance du point F au plan ACN devrait être plus grande que la distance du point B, qui est cependant plus grande qu'elle. Ce qui est absurde.

Ceci posé nous disons que les 27 cas dont nous avons parlé fournissent treize cas possibles seulement, les autres demeurant impossibles, et cela par la raison que pour ce qui est des distances des trois points B, E, F, au plan du cercle ACN, ces distances sont: 1° Toutes les trois différentes. 2° Les deux égales, l'une inégale. 3° Toutes les trois égales entre elles.

De là trois divisions:

a) *La 1ère division* comprend six espèces; car chaque point peut être supposé tour à tour plus éloigné que les deux autres, dont chacun peut être aussi alternativement supposé plus éloigné que l'autre; ce qui fait six hypothèses ou six espèces en tout. Maintenant comme la rencontre de la corde avec le rayon prolongé doit nécessairement avoir lieu du côté de la moindre distance, eu égard aux différents côtés où la rencontre aura lieu, il y aura lieu de considérer tantôt l'un et tantôt l'autre des différents quadrilatères formés par les triangles et les quadrilatères renfermés dans le cercle ACN. Tous ces quadrilatères auront

(1) Il est évident en effet que la rencontre d'une corde avec le diamètre a lieu du côté de l'extrémité de la corde qui se rapproche le plus de ce diamètre.

une partie commune: le triangle inactif BEF; ils peuvent même avoir encore d'autres éléments en commun; néanmoins selon les diverses modifications, les angles du triangle inactif changent de caractère chacun devenant tour à tour premier second ou commun. Sur ce point la règle à observer est que le point le plus éloigné est toujours le sommet du 1[er] angle; que le point de moyenne distance est le sommet de l'angle 2[ème] et que le point le plus rapproché est toujours le sommet de l'angle commun.

Ce que nous représentons par le diagramme suivant.

Ordre des variations possibles	1	2	3	4	5	6
Point le plus éloigné	B	B	F	F	E	E
Point de distance moyenne	E	F	B	E	B	F
Point le plus rapproché		E	E	B	F	B
Le quadrilatère auxiliaire sur lequel se fait la démonstration pour être ensuite appliquée au quadrilatère proposé	AB CF	DN BE	SF AE	NO FB	OD EF	CE SB

N.B. Dans la colonne 1. on trouve noté comme quadrilatère auxiliaire le quadrilatère ABCF, qui n'est autre que le quadrilatère proposé lui-même. C'est que dans ce cas il n'y a pas à proprement parler de quadrilatère auxiliaire séparé, confondu qu'il est avec le quadrilatère proposé.

b) *La 2ème division* donne également six espèces; car en supposant que deux des distances des trois points soient

égales, ceci peut avoir lieu de trois manières, selon que l'égalité de distance subsiste entre les points B–E, B–F, E–F, et dans chaque cas la distance du 3ème point peut être la plus grande ou la plus courte. Ce qui fait bien six cas. Maintenant si la distance du 3ème point est la plus grande, ce point sera nécessairement le sommet de l'angle premier; que si elle est la plus petite, ce point sera le sommet de l'angle commun; pendant que des deux autres points dont les distances sont égales, dans la 1ère supposition — celle où la distance du 3ème point est la plus grande — l'un ou l'autre peuvent être pris indifféremment pour sommets du 1er angle ou de l'angle commun; tandis que dans la 2ème supposition — celle où la distance du 3ème point est la plus courte — chacun des deux autres points d'égale distance peut être pris alternativement comme sommet du 1er ou du 2ème angle. [1] D'après ces distinctions, le quadrilatère complet auxiliaire lui-même varie. Dans chaque cas il existe deux quadrilatères complets qui, indépendamment du triangle inactif qui reste toujours commun — ont en outre commun — dans la 1ère supposition (celle où le 3ème point est le plus éloigné) le quadrilatère simple et ne diffèrent ainsi que par deux triangles; tandis que dans la 2ème supposition (celle où le 3ème point est le moins éloigné) ces deux quadrilatère complets ont en commun indépendamment du triangle inactif — deux triangles aussi — et ne diffèrent ainsi que par le quadrilatère simple.

(1) Par angle 1er 2nd commun, l'auteur désigne les angles du triangle inactif, lesquels d'après les définitions données dans le livre IIème déterminent, les lignes devant entrer dans les différents termes du rapport composé, c, à d. dans ce cas-ci du quadrilatère auxiliaire.

C'est ce qui est résumé dans le tableau ci-joint: [1]

Nombres indiquant les variantes possibles.	Point le plus éloigné — Sommet du 1er angle.	Points d'égale distance		Quadrilatère	Numéros de la correspondance des quadrilatères.
		2d angle.	Angle commun		
1	B	E	F	A B C F	6
		F	E	D N B E	5
2	E	B	F	C E S B	4
		F	B	O D E F	6
3	F	B	E	S F A E	5
		E	B	N O F B	4
	Point le plus proche — Sommet de l'angle commun.	1er angle.	2d angle.		
4	B	E	F	C E S B	2
		F	E	N O F B	3
5	E	F	B	S F A E	3
		B	F	D N B E	1
6	F	E	B	C D E F	2
		B	E	A B C F	1

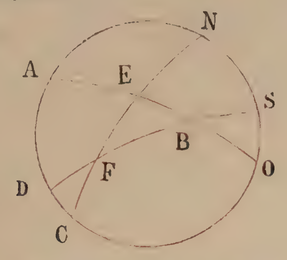
(1) Le tableau précédent se rapportait aux six cas de la 1ère division, c'est-à-dire ceux où les distances des trois points du triangle inactif sont tous les trois à des distances inégales du plan du cercle inactif ACN; tandis que ce tableau se rapporte aux six cas de la 2ème division, c'est-à-dire ceux où deux points sont à égale distance de ce même cercle, le 3ème point étant à une distance ou plus grande ou plus petite.

c) Quant à la 3ème division, elle se compose d'une seule espèce, celle où les distances des points B, E, F, au plan du cercle ACN qui comprend la colonne inactive sont toutes les trois égales entre elles.

Abordons maintenant l'examen de chacune de ces treize espèces prises à part. [1]

Examen des six premières espèces, où toutes les distances des points E, F, B, du triangle inactif au plan du cercle inactif ACN sont inégales.

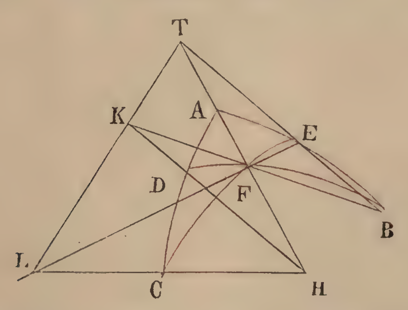
1ère espèce.



Ici le quadrilatère auxiliaire n'est autre que le quadrilatère proposé lui-même c.-à-d. ABCF; il s'agit de prouver que:

$$\frac{\sin AB}{\sin AE} = \frac{\sin BD}{\sin DF} \times \frac{\sin CF}{\sin CE}.$$

Démonstration. La distance du point B au plan du

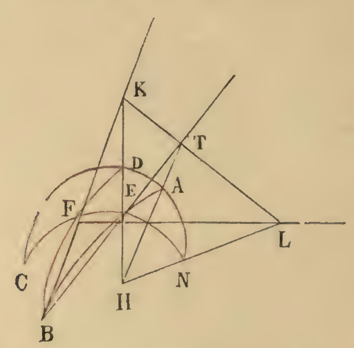


cercle CDA de la colonne inactive est plus grande que la distance du point F à ce même plan. Menons les cordes BE, BF, EF, du triangle inactif BEF, et soit H le centre.

(1) La multiplicité des figures, la fréquente répétition des mêmes lettres, et la longueur de la démonstration, ont fait commettre au copiste dans cette partie du manuscrit bien des confusions et des erreurs qu'on relève facilement en se guidant sur les indications du texte et la marche générale du raisonnement.

De ce point menons aux trois points de la colonne inactive ACD, les rayons HA, HD, HC, et prolongeons-les ainsi que les trois cordes jusqu'à leur rencontre. La corde BE rencontrera nécessairement le rayon AH, du côté de A, au point T, p. e. — BF, rencontrera également le rayon HD du côté de D, au point K, p. e. — et EF rencontrera le rayon HC du côté de C au point L, p. e. — Les trois points T, K, L, se trouveront à la fois dans le plan des trois cordes du triangle inactif et aussi dans celui du cercle ADC de la colonne inactive, c.-à-d. sur leur intersection, représentée par la droite TKL. — Nous aurons ainsi formé le quadrilatère plan TLFB, dans lequel $\frac{BT}{TE} = \frac{BK}{KF} \times \frac{FL}{LE}$. Mais $\frac{BT}{TE} = \frac{\sin AB}{\sin AE}$; $\frac{BK}{KF} = \frac{\sin BD}{\sin DF}$; $\frac{FL}{LE} = \frac{\sin CF}{\sin CE}$ d'où substituant on a etc. C. Q. F. D.

2ème espèce.

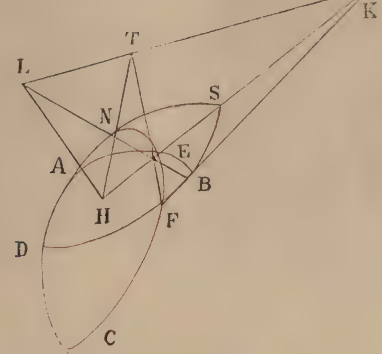


Ici B est le point le plus éloigné; F, le point de distance moyenne, E le point le plus rapproché. DNBE constitue le quadrilatère auxiliaire. Traçons-le ensemble avec le quadrilatère proposé. Prolongeons les cordes et les rayons comme nous l'avons dit; nous aurons formé le quadrilatère plan KTLEBF, dans lequel $\frac{BT}{TE} = \frac{BK}{KF} \times \frac{FL}{LE}$ ou ce qui revient au même $\frac{\sin AB}{\sin AE} = \frac{\sin BD}{\sin DF} \times \frac{\sin FN}{\sin NE}$. Mais FN = suppl. CF; NE = suppl. EC; leurs sinus sont par

conséquent égaux. La démonstration peut donc être appliquée au quadrilatère proposé ABCF pour lequel on aura

$$\frac{\sin\ AB}{\sin\ AE} = \frac{\sin\ BD}{\sin\ DF} \times \frac{\sin\ CF}{\sin\ CE}. \text{ C. Q. F. D.}$$

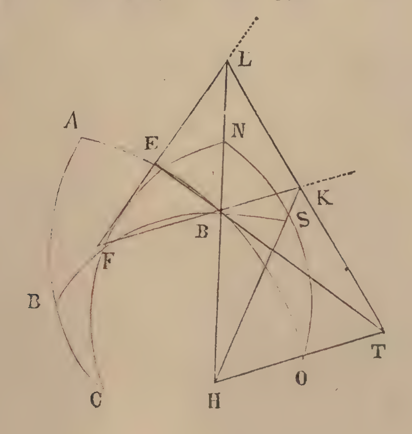
3ème espèce.



Ici F, est le point le plus éloigné; E, le point le plus rapproché. Quadrilatère auxiliaire SNAEFB. Prolongeons les cordes et les rayons; nous aurons formé le quadrilatère plan KBFELT, dans lequel $\frac{BL}{LE} = \frac{BK}{KF} \times \frac{FT}{TE}$, ou bien ce qui revient au même $\frac{\sin\ BA}{\sin\ AE} = \frac{\sin\ BS}{\sin\ SF} \times \frac{\sin\ FN}{\sin\ NE}$. Mais BS = suppl. BD; SF = suppl. FD; FD = suppl. CF; NE = suppl. EC. D'où substituant et transportant la démonstration au quadrilatère proposé ABCE, on aura:

$$\frac{\sin\ AB}{\sin\ AE} = \frac{\sin\ BD}{\sin\ DF} \times \frac{\sin\ CF}{\sin\ CE}. \text{ C. Q. F. D.}$$

4ème espèce.



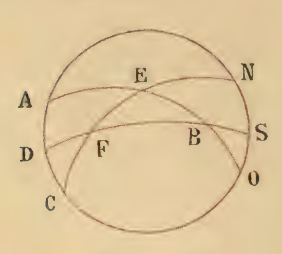
F est le point le plus éloigné — B, le point le plus rapproché. Quadrilatère auxiliaire FENSOB — Quadrilatère plan LKTBFE, dans lequel $\frac{BT}{TE} = \frac{BK}{KF} \times \frac{FL}{LE}$, ou, ce qui revient au-même $\frac{\sin BO}{\sin OE} = \frac{\sin BS}{\sin SF} \times \frac{\sin FN}{\sin NE}$.

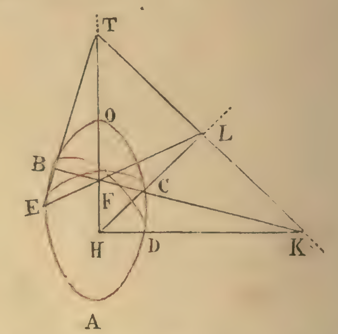
Mais BO = suppl. BA; OE = suppl. AE;
BS = suppl. BD; SF = suppl. FD;
FN = suppl. FC; NE = suppl. EC.

D'où substituant on a de nouveau:

$$\frac{\sin AB}{\sin AE} = \frac{\sin BD}{\sin FD} \times \frac{\sin FC}{\sin EC}. \text{ C. Q. F. D}$$

5ème espèce.

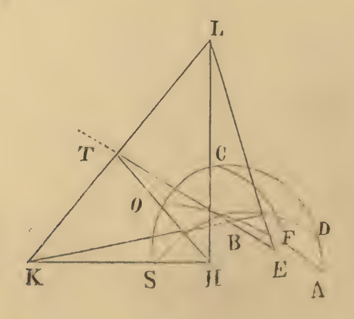




E est le point le plus éloigné. F le plus rapproché. Quadrilatère auxiliaire OCDFEB. — Quadrilatère plan TLKFEB. Dans ce quadrilatère plan nous aurons $\frac{BT}{TE} = \frac{BK}{KF} \times \frac{FL}{LE}$, ou bien, ce qui revient au même $\frac{\sin BO}{\sin OE} = \frac{\sin BD}{\sin DF} \times \frac{\sin FC}{\sin CE}$.

Mais BO = suppl. AB; OE = suppl. AE. Donc substituant etc. C. Q. F. D.

6ème espèce.



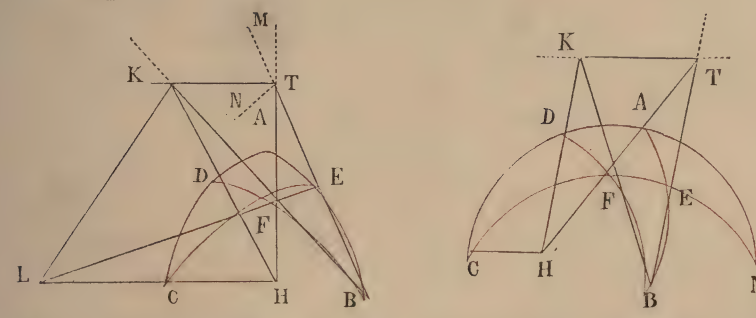
E est le point le plus éloigné, B le plus rapproché. Quadrilatère auxiliaire CFEBSO. — Quadrilatère plan LTKBEF.

$$\frac{BT}{TE} = \frac{BK}{KF} \times \frac{FL}{LE}, \text{ ou bien } \frac{\sin BO}{\sin OE} = \frac{\sin BS}{\sin SF} \times \frac{\sin FC}{\sin CE}.$$

Mais BO = suppl. AB; OE = suppl. AE;
BS = suppl. BD; SF = suppl. DF. Donc etc. C. Q. F. D.

Examen des six deuxièmes espèces, où les distances de deux points du triangle inactif au plan du cercle inactif sont égales entre elles.

1ère espèce.



Ici la distance de B est plus grande que celle des points E et F au plan ACN et la distance de ces deux points est égale. (Nous désignerons désormais cette relation par B ⁄ (E = F). Quadrilatère auxiliaire: ABCF, qui est le quadrilatère proposé lui-même ou bien le quadrilatère DANEBF.

Prolongeons les cordes du triangle inactif BEF et les rayons menés aux trois points de la colonne inactive ADC, ADN, de H centre de la sphère.

Dans la 1ère figure
la corde BE et le rayon AH se couperont au point T
» BF » DH » » K.

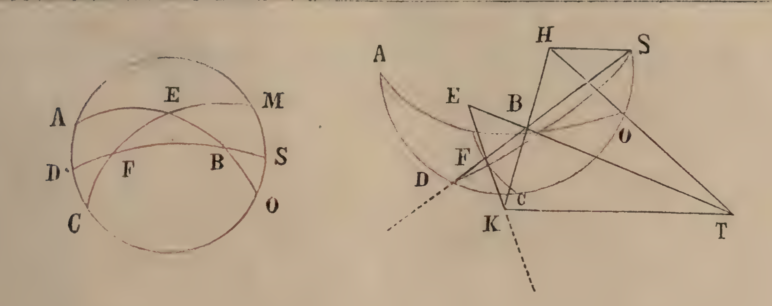
Tirons TK — à cause de l'égalité des distances des points E, F, au plan du cercle ADC, la corde EF, ne peut rencontrer ce plan; d'ailleurs EF et HC, se trouvent dans le

même plan (le plan du cercle EFC), donc EF et HC sont parallèles. — Les points T, K, se trouvent à la fois dans le plan des cordes du triangle inactif et dans celui du cercle de la colonne inactive. La ligne qui les joint sera donc l'intersection des deux plans et en outre elle sera parallèle à FL, pour trois raisons: 1° à cause de l'impossibilité qu'il y a à ce que la ligne FL rencontre le plan du cercle inactif. 2° Parceque TK et CH sont parallèles. Remarquons tout d'abord que TK et CH sont dans le même plan, celui du cercle inactif ADC; donc si TK et CH n'étaient pas parallèles, elles se rencontreraient au point L par exemple. Alors FLE, serait une ligne droite, les points E, F, L, devant nécessairement appartenir à la fois au plan des cordes du triangle inactif et à celui de la colonne inactive, et EF parallèle à HC, la rencontrerait pourtant, ce qui est contradictoire. Donc TK est parallèle à HC. Mais HC est parallèle à FL, donc TK est parallèle à FL. 3° Parceque si TK n'était pas parallèle à FL elle ne serait pas parallèle à HC non plus, qui lui est pourtant parallèle. En effet, menez TM dans le plan du triangle BEF, parallèle à FL; et TN, dans le plan du cercle ADC, parallèle à CH; alors TM, parallèle à FL qui est parallèle à HC, qui est parallèle à TN, serait parallèle à cette dernière ligne; ce qui est absurde, ces deux lignes se rencontrant en T.

Cela prouvé on aura $\frac{BT}{TE} = \frac{BK}{KF}$, $\frac{\sin BA}{\sin EA} = \frac{\sin DB}{\sin DF}$.

Nous pouvons maintenant compléter le rapport à droite en multipliant pour la 1ère figure par $\frac{\sin FC}{\sin CE} = 1$, ou bien pour la 2ème figure par $\frac{\sin FN}{\sin NE} = \frac{\sin FC}{\sin CE} = 1$, et l'on aura

$$\frac{\sin BA}{\sin AE} = \frac{\sin BD}{\sin DF} \times \frac{\sin FC}{\sin CE} \left(= \frac{\sin FN}{\sin NE} = 1 \right). \text{ C. Q. F. D.}$$

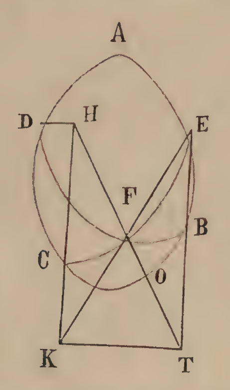


2ème Espèce. $E > (B = F)$.

Quadrilatère auxiliaire:

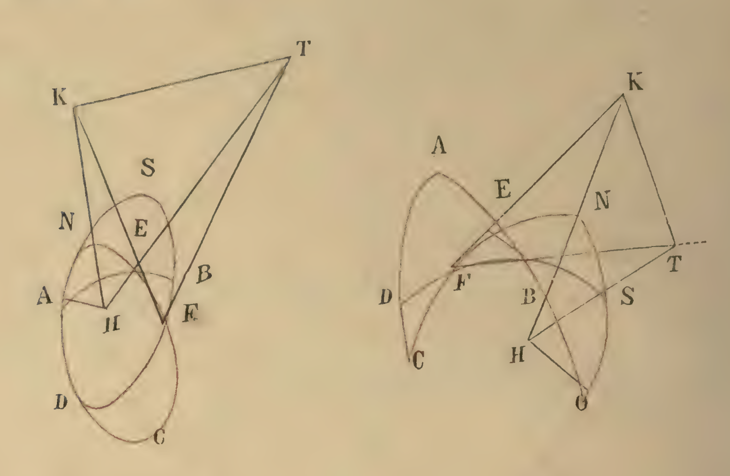
ODEF (si F est pris pour sommet de l'angle 2ème
et B » » » commun)

ou bien CESB (dans l'hypothèse inverse).



Prolongeons les cordes EF, EB et les rayons HO, HC, jusqu'à leur rencontre en K, T. Joignons la corde BF, et les rayons HD, HS. — On prouvera comme précédemment que ces rayons sont parallèles à la corde BF, ainsi qu'à la droite KT. — Dans le triangle ETK on aura $\frac{BT}{TE} = \frac{FK}{KE}$, ou ce qui revient au même $\frac{\sin BO}{\sin OE} = \frac{\sin FS}{\sin SE}$. Mais on a, d'un côté, $\frac{\sin DF}{\sin DB} = 1$, $\frac{\sin FS}{\sin SB} = \frac{\sin FC}{\sin CE} = 1$; et d'un autre côté, BO = suppl. BA; OE = suppl. EA; BS = suppl. BD;

SF = suppl. FD. D'où substituant etc. on a $\frac{\sin BA}{\sin EA}$ etc. C. Q. F. D. —



3ème Espèce. F > (B = E).

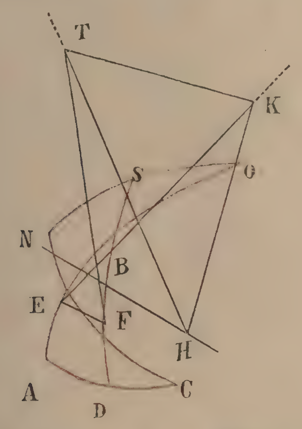
Quadrilatère auxiliaire.

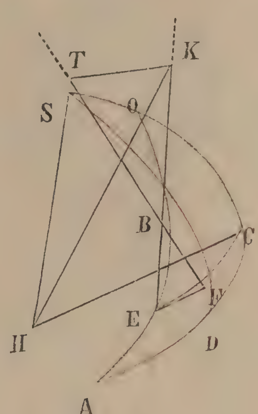
NOFB (pour B sommet de l'angle commun) ou
SFAE (pour E sommet de l'angle commun).

Prolongeons les cordes FB, FE jusqu'à leur rencontre avec les rayons HS, HN aux points T, K. Tirez TK, BE. Ces lignes seront parallèles comme il a été précédemment établi. — Menez les rayons HA, HO, ils leur seront aussi parallèles. — Maintenant dans le triangle FTK, $\frac{BT}{TF} = \frac{EK}{KF}$, ou bien $\frac{\sin\ BS}{\sin\ SF} = \frac{\sin\ NE}{\sin\ NF}$.

Dans le quadrilatère NOFB, $\frac{\sin\ BO}{\sin\ OE} = \frac{\sin\ BA}{\sin\ AE} = 1$ — Dans le quadrilatère SFAE on a ces mêmes rapports qui sont composés de $\frac{\sin\ BS}{\sin\ SF}$ et de son inverse c, à d. de $\frac{\sin\ NF}{\sin\ NE}$. D'ailleurs BS = suppl. BD; SF = suppl. FD; FN = suppl. FC; NE = suppl. EC. Donc substituant et transportant

la démonstration au quadrilatère proposé, on aura, etc. C Q. F D.





4ème Espèce. B < (E = F).

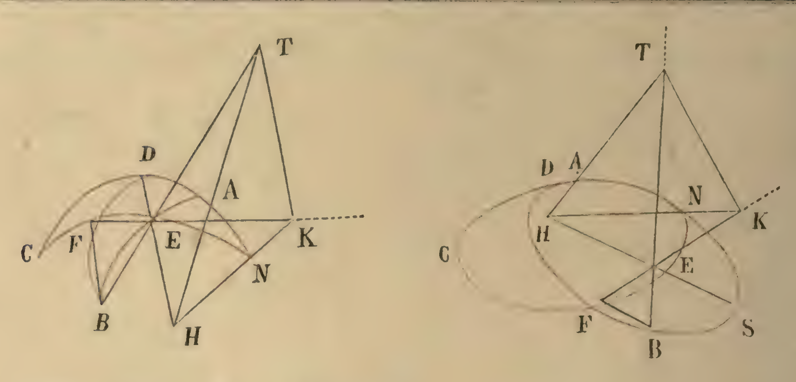
Quadrilatère auxiliaire:

CESB (pour E sommet de l'angle 1er) ou

NOFB (pour F sommet de l'angle 1er).

Prolongeons les cordes EB, FB et les rayons HS, HO, jusqu'à leur rencontre aux points T, K; menons TK, EF, et les rayons HC, HN, nous savons qu'ils sont parallèles. Les triangles EFB, BTK, seront semblables et l'on aura $\frac{KB}{KE} = \frac{BT}{TE}$ ou bien $\frac{\sin BO}{\sin OE} = \frac{\sin BS}{\sin SF}$. Dans les deux quadrilatères CESB, NOFB, $\frac{\sin BO}{\sin OE} = \frac{\sin BS}{\sin SF}$ multiplié par le rapport d'égalité $\frac{\sin FC}{\sin EC} = 1$, pour le 1er quadrilatère; ou par $\frac{\sin FN}{\sin NE}$ pour le 2nd quadrilatère. Mais pour tous les deux quadrilatères; BO suppl. BA; OE = suppl. EA; BS = suppl. BD; SF = suppl: FD; — et pour le dernier quadrilatère spécialement FN = suppl. FC; NE suppl. EC; — D'où substituant etc. on aura $\frac{\sin BA}{\sin AE} = \frac{\sin BD}{\sin DF} \times \frac{\sin FC}{\sin CE}$

C. Q. F. D. —



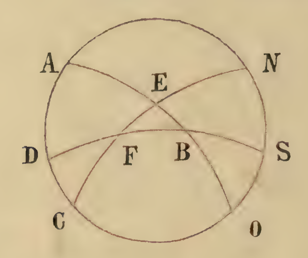
5ème Espèce. $E < (B = F)$.

Quadrilatère auxiliaire :

SFAE (pour F : sommet du 1er angle).

DNBE (pour B sommet du 1er angle).

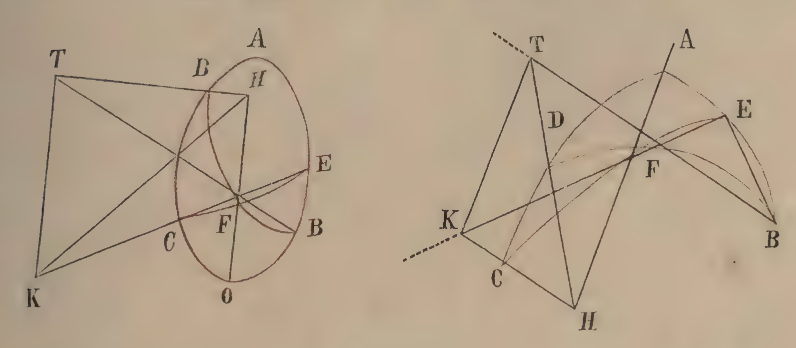
Prolongeons les cordes BF, BE et les rayons HN, HA, jusqu'à leur rencontre aux points T, K. Menez TK, BF, et les rayons HS, HD. Nous savons qu'ils seront parallèles ; les triangles BEF, BKT seront semblables, et l'on aura $\frac{BT}{TE} = \frac{FK}{KE}$ ou bien $\frac{\sin BA}{\sin AE} = \frac{\sin FN}{\sin FE}$.



Dans le 1er quadrilatère $\frac{\sin BA}{\sin AE} = \frac{\sin BS}{\sin SF}$ (rapport d'égalité $= 1$) $\times \frac{\sin FN}{\sin NE}$ (rapport simple égal au rapport composé $\frac{\sin BA}{\sin AE}$). Dans le 2nd quadrilatère $\frac{\sin BA}{\sin AE} = \frac{\sin BD}{\sin DF}$ (rapport d'égalité $= 1$) $\times \frac{\sin FN}{\sin NE}$ (rapport simple égal au

rapport composé $\frac{\sin \text{ BA}}{\sin \text{ AE}}\Big)$.

Mais BS = suppl. BD; — SF = suppl. DF; — FN = suppl. FC; — NE = suppl. EC. Donc on aura pour tous les deux quadrilatères $\frac{\sin \text{ BA}}{\sin \text{ AE}} = \frac{\sin \text{ BD}}{\sin \text{ DF}} \times \frac{\sin \text{ FC}}{\sin \text{ EC}}$. C. Q. F. D.



6$^{\text{ème}}$ Espèce. F < (B = F).

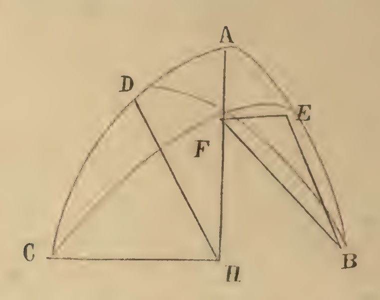
Quadrilatère auxiliaire:

ODEF (pour E sommet du 1$^{\text{er}}$ angle) ou
ABCF (pour B » » »)

Traçons ces quadrilatères, prolongeons les cordes BF, EF et les rayons HD, HC jusqu'à leur rencontre aux points T, K. Menons TK, EB, HO, HA. Ces lignes seront parallèles, les triangles BEF, FTK seront semblables et l'on aura $\frac{\text{BT}}{\text{TF}} = \frac{\text{EK}}{\text{KF}}$, ou bien $\frac{\sin \text{ BD}}{\sin \text{ DF}} = \frac{\sin \text{ EC}}{\sin \text{ CF}}$. Mais dans le 1$^{\text{er}}$ quadrilatàre $\frac{\sin \text{ BO}}{\sin \text{ OE}}$ est un rapport d'égalité aussi bien que le rapport $\frac{\sin \text{ AB}}{\sin \text{ AE}}$ dans tous les deux quadrilatères. Ce dernier peut par conséquent être considéré dans tous les deux quadrilatères comme composé du rapport $\frac{\sin \text{ BD}}{\sin \text{ DF}}$ et de son inverse soit $\frac{\sin \text{ CF}}{\sin \text{ CE}}$. C. Q. F. D.

Examen de l'espèce unique de la 3ème Division.

Cette espèce unique de la 3ème Division qui constitue la dernière des 13 espèces possibles est celle où les trois distances au plan du cercle inactif des points B, E, F du triangle inactif sont égales.



Tirons les cordes BE, EF, FB et les rayons HD, HC, HA, chaque corde sera parallèle au rayon du cercle dont le plan contient la corde.

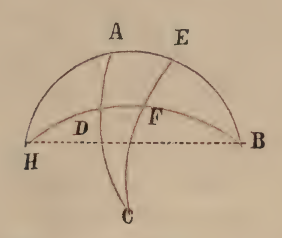
BE sera donc parallèle à AH
BF » » » HD
EF » » » CH.

On aura donc $\frac{\sin BA}{\sin AE} = \frac{\sin BD}{\sin DF} = \frac{\sin FC}{\sin EC} = 1$. Or chaque rapport composé qui constitue un rapport d'égalité, peut être considéré comme composé de deux rapports d'égalité. Donc cette fois-ci encore, on aura

$\frac{\sin BA}{\sin AE} = \frac{\sin BD}{\sin DF} \times \frac{\sin FC}{\sin EC}$. C. Q. F. D. —

Ici se termine la démonstration du rapport implicite de Ptolémée: et l'on pourra suivre la même marche pour démontrer n'importe quelle espèce de rapport qui se ramène à la proposition première, que le triangle inactif soit le triangle BEF ou bien le triangle DFC, pourvu qu'il s'agisse du rapport ordonné. L'examen de ces cas,

entraînerait de trop longs développements qui seraient d'ailleurs superflus pour les personnes qui sont au courant des règles concernant cette partie. Faisons seulement remarquer, que le rapport implicite de Ptolémée une fois démontré, nous pouvons commencer par ce rapport et prouver ensuite le rapport explicite par le rapport implicite en suivant une marche inverse que Ptolémée a adoptée; de cette manière chaque espèce pourrait être démontrer directement et aussi par voie de conséquence. Ainsi reprenant la figure connue et renversant la proposition nous dirions: du moment que dans le quadrilatère EAHDCF, il a été établi ainsi que nous l'avons fait précédemment



que $\frac{\sin EH}{\sin EA} = \frac{\sin HF}{\sin DF} \times \frac{\sin DC}{\sin CA}$ (rapport implicite); et que BE = suppl. EH; — BF = suppl. HF; ou doit avoir $\frac{\sin BE}{\sin EA} = \frac{\sin BF}{\sin FD} \times \frac{\sin DC}{\sin CA}$. (rapport explicite).

CHAPITRE IV.

Des rapports qui se trouvent dans les autres cas des propositions relatives au quadrilatère sphérique.

Les rapports de la proposition ordonnée de la 1ère Espèce[1] ayant été ainsi démontrés dans la figure du quadrilatère ABCF, les autres espèces de rapports résultant soit des inversions, soit des interversions (confusion), aussi bien de cette proposition 1ère que des deux autres dont il a été parlé au Livre IIème, se trouvent par cela même démontrées eu égard aux propriétés des rapports composés qui s'y présentent. Ainsi étant donné la proposition du rapport explicite de Ptolémée $\frac{\sin BE}{\sin EA} = \frac{\sin BF}{\sin FD} \times \frac{\sin DC}{\sin CA}$, les sinus des arcs BE, FD, CA constituent le 1er membre[2] et les sinus des arcs EA, BF, DC, le second membre. Si donc nous avons à considérer le rapport:
$\frac{\sin BE}{\sin BF} = \frac{\sin EA}{\sin CA} \times \frac{\sin DC}{\sin DF}$, nous nous trouvons dans le cas de la 2ème proposition ordonnée; et si nous avons à considérer le rapport $\frac{\sin BE}{\sin DC} = \frac{\sin EA}{\sin DF} \times \frac{\sin BF}{\sin CA}$, nous nous trouvons dans le cas de la 3ème proposition. En ayant donc égard aux propriétés du rapport composé on arrive aux 35 espèces qui se répètent dans chacune des trois propositions comme pour le quadrilatère plan, avec cette différence que leurs explications ou démonstrations ne se déduisent pas les unes des autres, mais se ramènent toutes à des démonstrations auxquelles la proposition de la 1ère

(1) V, Livre II. Chapitre III.
(2) V. Livre I. Prop. X.

espèce sert toujours d'intermédiaire. La raison en est que, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer à la fin du Chapitre II^ème^ du Livre II^ème^ la proposition première ordonnée est la base et que les autres n'on sont que des dérivations. Il y a réellement une ressemblance frappante entre ces propositions et les formes du syllogisme en Logique, où la première forme sert de principe à toutes les autres qui n'en sont que des corollaires. [1]

La science n'est qu'en Dieu.

CHAPITRE V.

Indication de l'utilité qu'on tire de cette figure et épilogue.

L'utilité de cette figure consiste en ce qu'on arrive à connaître les grandeurs des arcs résultant des intersections des grands cercles sur la surface de la sphère, en se servant à cet effet des uns pour trouver les autres. Nous avons montré dans le Livre I, la manière dont on peut se servir des cinq termes connus d'un rapport composé pour arriver à la connaissance du 6^ème^ terme lorsqu'il est inconnu. Ces mêmes règles sont ici un moyen assuré d'obtenir ce qu'on veut avoir. Très souvent il arrive dans cette recherche, que deux arcs parmi les six qui constituent l'ensemble du rapport composé soient inconnus et qu'ils se trouvent l'un à l'égard de l'autre, dans l'ordre exigé pour le rapport

[1] الا ان بياناتها لم تمكن هناك للبعض يتوسط البعض وههنا يكون لماعدا الدعوى الاولى على الترتيب تتوسطها وهذا هو الوجه فيما قلنا فى اخر الفصل الثانى من المقالة الثانية من كون الدعوى الاولى على الترتيب اصلا وماعداها فروعاله وماشبه هذه الدعاوى باشكال المنطق فان الشكل الاول كالاصل وماعداه كالفروع

implicite ou explicite, de manière qu'on connaisse le rapport du sinus de l'un au sinus de l'autre arc au moyen des deux autres rapports. Alors la règle pour trouver les inconnues est celle-là même que nous avons indiquée dans le Livre III, ce qui rend la figure du quadrilatère très utile. Les anciens n'ont pas manqué de l'utiliser dans ce but et de s'en servir avec confiance ainsi que cela se voit dans le Livre de Ménélas sur la Sphère et dans le commencement de l'Almageste de Ptolémée. Mais les modernes soit par crainte de s'engager dans l'examen des différents rapports et de leurs variétés, soit pour éviter les longueurs, que l'usage des rapports composés entraîne dans la pratique, ont imaginé et étudié d'autres figures destinées à tenir la place du quadrilatère et à procurer l'utilité qu'on en retire, sans qu'on ait besoin de recourir à de nombreuses distinctions et aux rapports composés. Aussi avons-nous cru utile, une fois engagés dans cette étude, de parler des méthodes usitées parmi les modernes, afin de compléter avec l'aide de Dieu, tout ce qui a trait à cette branche de la science.

LIVRE V.

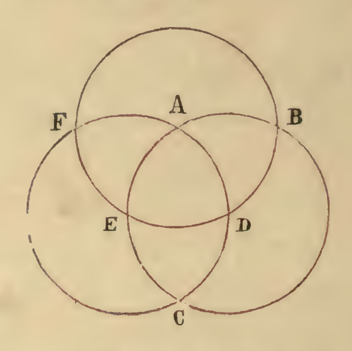
EXPLICATION DES MÉTHODES QUI TIENNENT LIEU DE LA FIGURE DU QUADRILATÈRE DANS LA RECHERCHE DES ARCS DE GRANDS CERCLES QUI SE COUPENT SUR LA SURFACE D'UNE SPHÈRE.

CHAPITRE I.

De la nature des angles auxquels donne naissance l'intersection des grands cercles sur la surface de la sphère.

Lorsque deux grands cercles se coupent, sur la surface d'une sphère, en deux points opposés, il se forme autour de chacun de ces points quatre angles. — Pour en connaître la valeur, nous prenons ce point pour pôle et nous imaginons sur la surface de la sphère, un 3ème grand cercle, qui à la distance d'un quart de cercle tombe sur ces deux cercles. Ce cercle passera à égale distance de chacun des deux points et il devient par rapport à eux une zône; ainsi que cela est établi dans la propos. XVIII du Livre I, des Sphériques de Théodose. Les deux premiers cercles coupent alors ce dernier en quatre parties, chacune desquelles devient le côté qui fait face à deux angles opposés des huit angles qui sont formés autour des deux points; et le nombre des 360 parties de la zône compris dans chacun de ces arcs, constitue la mesure des angles opposés

qui lui correspondent. Cet arc représente en outre le plus grand écart des côtés des angles qui lui sont opposés. Il est donc évident que les deux angles en question sont égaux. Après quoi, si les deux premiers grands cercles font entre eux des angles droits, chacun des arcs qui leur correspondent sur la zône sera de 90 parties. Ce nombre mesure donc tous les angles droits, tandis que les angles aigus ou obtus seront représentés par un nombre de parties de la zône respectivement moindre ou plus grand que 90. La somme de tous les angles aigus et obtus adjacents est égale à une demi-circonférence, et chacun des deux angles restants est égal à son opposé, (par le sommet) angle aigu à angle aigu et angle obtus à angle obtus.



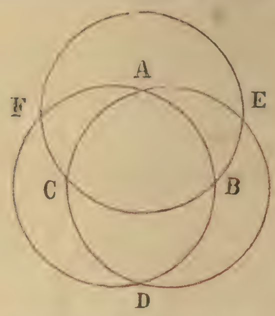
Soient deux cercles ABCE, ADCF qui se coupent aux points A et C. On aura autour du point A, les 4 angles, BAD, DAE, EAF, FAB et autour du point C les quatre autres BCD, DCE, ECF, BCF. Des points A, C, comme pôles, avec une ouverture de compas égale à un quadrant de ces deux cercles décrivez le cercle BDEF; ce cercle sera leur zône et il sera partagé en quatre parties, BD, DE, EF, FB, lesquelles parties seront les côtés opposés aux angles formés autour des points A, C. — L'arc BD opposé aux angles BAD, BCD, en sera la mesure, et représentera en même temps le plus grand écart des arcs ABC, ADC. De même DE mesurera les angles DAE, DCE; EF, les deux

angles FAE, FCE; — et BF les deux angles BAF, BCF. D'où il devient évident que les angles BAD, BCD sont égaux, du moment qu'ils ont pour mesure un même arc. Il en sera de même pour les autres — Que si maintenant les deux cercles se coupent à angles droits, BD, DE, EF, FB, seront autant de quadrants; dans le cas contraire, si l'angle BAD p. e. est aigu, l'angle DAE sera obtus et le supplément du précédent; l'angle BAD sera d'ailleurs égal à FAE, chacun d'eux correspondant à une demi-circonférence moins l'arc DE; de même on aura angle DAE = angle BAF. D'où il résulte que dans le cas d'intersection de deux grands cercles on aura toujours 4 angles aigus égaux entre eux et 4 angles obtus égaux aussi; et que chaque angle aigu ajouté à un angle obtus donnera deux angles droits.

CHAPITRE II.

Propriétés des triangles formés par les intersections des grands cercles sur la surface de la sphère et de leurs différentes espèces.

Lorsque trois grands cercles se coupent sur la surface de la sphère, de manière à former un triangle, ils forment en même temps sept autres triangles sphériques; la surface de la sphère est ainsi partagée en huit triangles, avec six points d'intersection, douze arcs de cercle et vingt-quatre angles, et comme nous l'avons déjà dit, de ces huit triangles les quatre situés dans un hémisphère sont égaux et semblables aux quatre autres situés dans l'autre hémisphère chacun à chacun.



Par exemple le triangle ACF est semblable et égal au triangle EDB car : AF = $\frac{1}{2}$ circ. — AB = DB; AC = $\frac{1}{2}$ circ. — CD = ED; FC $\frac{1}{2}$ circ. — BC = EB.

$\widehat{FAC} = \widehat{EAB}$ (comme opposé par le sommet, et à cause de $\widehat{EAB} = \widehat{EDB}$) $= \widehat{EDB}$;

$\widehat{AFC} = \widehat{ABC} = \widehat{EBD}$;

$\widehat{ACF} = \widehat{BCD} = \widehat{BED}$.

Il en sera de même des autres triangles, de sorte que les quatre triangles situés dans chaque hémisphère seront égaux deux à deux aussi bien quant aux angles que quant aux côtés.

En ce qui concerne les quatre triangles situés dans le même hémisphère en comparant deux quelconques d'entre eux, on trouve qu'ils ont un angle et un côté égaux, et leurs autres éléments sont supplémentaires l'un de l'autre. Ainsi si nous comparons le triangle ABC avec le triangle CDF, nous voyons que :

Ces deux triangles ont l'angle C égal, comme opposé par le sommet et le côté AB = FD (tous les deux étant les suppléments de l'arc AF) tandis que BC = suppl. FC; AC = suppl. CD. Angle $\widehat{ABC} = \widehat{AFC}$ = suppl. $\widehat{CFD}$; — et angle $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ = suppl. $\widehat{CDF}$.

C'est ce qui fait qu'il suffit de connaître un seul de ces huit triangles pour qu'ils soient tous déterminés.

En outre selon que chaque côté d'un triangle est égal à une demi-circonférence, plus grand ou plus petit que celle-ci, on a dix espèces de triangles, les suivantes:

A

1° 3 côtés = 3 quadrants;	2° 2 côtés = quadrant; 1 côté $<$ q.
3° 2 côtés = q; 1 côté $>$ q.	4° 1 côté = q; 2 côtés $<$ q.
5° 1 côté = q. 2 côtés $>$ q.	6° 1 côté = q; 1 côté $<$ q; 1 côté $>$ q.
7° 3 côtés $<$ q;	8° 2 côtés $>$ q; 1 côté $<$ q.
9° 2 côtés $<$ q; 1 côté $>$ q;	10° 3 côtés $>$ q.

Or comme on trouve deux de ces espèces de triangles toutes les fois qu'il y a intersection de trois cercles, il en résulte qu'il y a en tout cinq espèces d'intersections. Supposons en effet qu'un des huit triangles appartienne à la 7ème catégorie, en d'autres termes qu'il ait chacun de ses trois côtés moindre qu'un quadrant, dans ce cas, les trois triangles situés dans le même hémisphère appartiendront à la 8ème catégorie devant nécessairement avoir deux côtés plus grands qu'un quadrant, et un côté plus petit qu'un quadrant. Car le triangle en question devant avoir ses trois côtés égaux à un côté de chaque triangle, ceux-ci auront un côté moindre qu'un quadrant; pendant que leurs deux autres côtés seront les suppléments de ceux du premier. On peut donc en conclure que si le premier triangle appartenait à la 8ème catégorie et s'il avait deux côtés plus grands qu'un quadrant et un côté plus petit, deux des triangles restant seraient de cette même catégorie, tandis que le 3ème appartiendrait à la 7ème catégorie et aurait ses trois côtés plus petits qu'un quadrant; et voilà comment deux des dix espèces de triangles que nous venons d'énumérer (la 7ème et la 8ème) sont coexistantes et proviennent de la même nature d'intersection. On peut en dire autant de la 4ème espèce et de la 5ème et de la 6ème espèce; puisque des quatre triangles, l'un sera de la 4ème espèce, un second de la 5ème; et les deux autres de la 6ème; Et aussi de la 9ème et de la 10ème espèce (deux des quatre triangles

appartenant à chacune de ces deux espèces). — Il n'y a que la 1ère espèce qui ne s'associe à aucune autre espèce si ce n'est à elle-même.

Voici maintenant les cinq intersections dont nous venons de parler.

B				
Ière intersection comprend des triangles de la 1ère espèce.				
IIème	»	»	»	2ème et 3ème.
IIIème	»	»	»	4ème, 5ème et 6ème.
IVème	»	»	»	7ème et 8ème.
Vème	»	»	»	9ème et 10ème.

On peut également ranger les triangles sphériques en ayant égard à leurs angles, selon qu'ils sont droit aigus ou obtus, en dix catégories ainsi qu'il suit:

A	
1° Chacun des trois angles $= 1$ D.	6° $1 = D$; $1 > D$; $1 < D$.
2° 2 angles $= D$. un angle $< D$.	7° 3 angles aigus.
3° 2 » $= D$. » » $> D$.	8° $1 < D$; $2 > D$.
4° 1 » $= D$. 2 » $< D$.	9° 3 angles obtus.
5° 1 » $= D$. 2 » $> D$.	10° $1 > D$; $-2 < D$.

Les intersections donnant naissance à ces dernières dix catégories, sont également au nombre de cinq:

B				
Ière intersection comprend des triangles de la 1ère espèce.				
IIème	»	»	»	2ème et 3ème.
IIIème	»	»	»	4ème, 5ème et 6ème.
IVème	»	»	»	7ème et 8ème.
Vème	»	»	»	9ème et 10ème.

Quant à la manière de trouver l'association des différentes catégories de triangles notées sous chaque espèce d'intersection, on adoptera une marche de tout point analogue à celle dont nous avons fait usage en traitant des premières cinq intersections (B), qui se rapportaient aux dix catégories de triangles (A) rangés d'après la grandeur de leurs côtés.

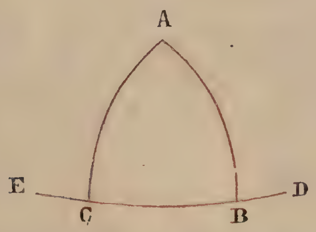
CHAPITRE III.

Des règles relatives aux différentes espèces de triangles et des considérations générales et particulières qui s'y rattachent.

Nous commencerons par exposer ce qui a trait aux dix premières catégories de triangles (Chap. précéd. A).

I. Tout triangle dont les côtés sont des quadrants a nécessairement ses angles égaux à 90°. — Les intersections constituent les pôles. C'est ce qui est établi dans les Propos. 17ème et 18ème du Livre Ier des Sphériques de Théodose.

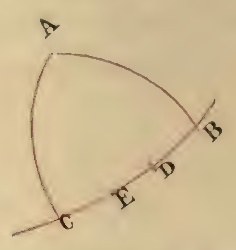
II. Si un triangle a deux de ses côtés égaux chacun à un quadrant et son 3ème côté $< Q$, il aura deux angles égaux à 90°, et un angle aigu. Le sommet de ce dernier sera le pôle de l'arc qui lui est opposé, et les pôles des deux autres côtés seront placés sur l'arc de l'angle aigu en dehors du triangle.



En effet, chacun des côtés AB, AC étant $= Q$, les angles ABC, ACB seront droits, ainsi que cela est établi dans la Propos. XVIème du Livre I. des Sphériques de Théodose. Mais $BC < Q$, donc $CAB < 1$ D. Que si nous prolongeons BC jusqu'à D et jusqu'à E, de manière que $CD = BE = Q$, alors E sera le pôle de AB et D celui de AC.

III. Si un triangle a deux de ses côtés égaux chacun à un quadrant et son 3ème côté $>$ quadrant, il aura deux angles

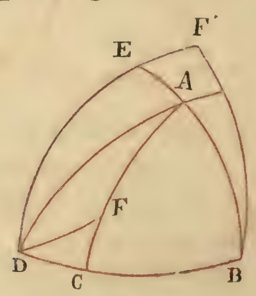
droits et un angle (celui opposé au côté > quadrant) obtus. Le sommet de ce dernier est le pôle de l'arc qui lui est opposé; quant aux pôles des deux autres côtés, ils se trouvent sur l'arc de l'angle obtus dans l'intérieur du triangle.



Soient AB, AC, égaux chacun à un quadrant, et BC > qu'un quadrant; A sera le pôle de BE, d'après ce qui a été dit, et les angles B et C seront droits; mais BC étant > Q, on aura angle A > D. Prenons BE = Q, E sera alors le pôle de l'arc AB; de même, si CD = Q, D sera le pôle de l'arc AC.

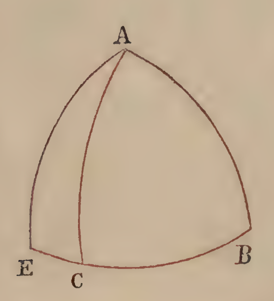
IV. Tout triangle dont un côté est égal à un quadrant et les deux autres moindres qu'un quadrant, aura l'angle opposé au quadrant obtus, et les deux autres aigus; quant aux pôles ils se trouvent tous trois dans le triangle.

Lemme. Tout angle droit ou aigu compris entre côtés moindres qu'un quadrant aura le côté qui lui est opposé, également moindre qu'un quadrant.



Soit $\widehat{ABC} = D$; AB, BC, tous deux moindres qu'un quadrant. Faites BD, DE, chacun égal à un quadrant et soit AD un arc de grand cercle. Cf. Théodose, Prop. 21ème, du

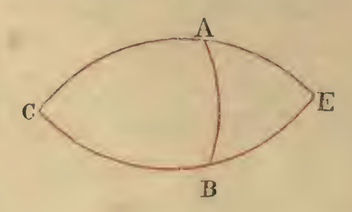
Livre I. Alors D étant un pôle, DA sera un quadrant. Cf. id. Prop. 17ème. Maintenant si AC était un quadrant, A serait le pôle de CD, ce qui n'est pas possible, puisque c'est E qui en est le pôle; et si AC était plus grand qu'un quadrant, prenez sur AC, $AF = Q$, et tracez DF, arc de grand cerele, en considérant A, comme un pôle, alors $\widehat{ADF}$ sera droit; mais $\widehat{EDB}$ aussi est droit; ce qui est contradictoire; donc $AC < Q$. Que si par supposition $\widehat{ABC}$ etait aigu, prolongez les arcs AB, BC jusqu'à E, et D, de façon que BD, BE soient égaux chacun à un quadrant, alors le triangle BDF a ses trois côtés égaux chacun à un quadrant; prolongez CA jusqu'à H; si ce point tombe sur un des côtés BF′, F′D, alors CH est moindre qu'un quadrant, et CA le sera *à fortiori;* que si H, tombait sur le sommet F′, alors CH serait un quadrant, et CA serait moindre qu'un quadrant C. Q. F. D.



Ceci posé, soit le triangle ABC conforme à la définition; si C est droit ou aigu, l'arc AB devrait être moindre qu'un quadrant. Mais AB est égal à un quadraat par hypothèse; donc C devra être plus grand qu'un angle droit. Prolongez BC, jusqu'à ce que $BE = Q$. Du point B comme pôle décrivez EA; alors $\widehat{BAE} = D$ et par conséquent $\widehat{BAE} =$ un angle aigu. De la même manière on démontrera que B est un angle aigu. D'ailleurs l'angle BAE étant droit, AE doit

passer par le pôle du cercle AB qui est ainsi placé hors du triangle ABC; de même l'arc de grand cercle passant par le pôle du cercle BC devant passer par le point B, le pôle tombe hors du triangle, l'angle B étant aigu. Egalement le pôle du cercle BCA se trouvera hors du triangle.

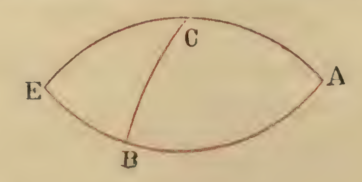
V. Le triangle qui a pour côtés un quadrant et deux côtés plus grands qu'un quadrant, aura tous ses angles obtus. Les pôles seront situés dans l'intérieur du triangle.



Dans le triangle ABC, soient AB = quadrant, $\begin{matrix} AC > \\ BC > \end{matrix} Q.$

Prolongez AC, BC, jusqu'à leur rencontre en E. Dans le triangle ABE ainsi formé, AB = Q, AE et BE sont chacun < Q. D'après ce qui vient d'être établi l'angle E sera obtus. C donc le sera aussi et les angles EAB, EBA étant aigus, $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CBA}$ seront obtus. Maintenant si nous supposons aux points A, B, deux arcs faisant deux angles droits avec AB, ces deux arcs se rencontreront nécessairement dans l'intérieur du triangle; leur point d'intersection sera le pôle de l'arc AB. Il en sera de même des deux autres pôles.

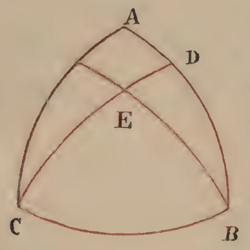
VI. Le triangle qui a pour côtés, un côté égal à un quadrant, un côté plus petit et un côté plus grand qu'un quadrant, a l'angle opposé au plus grand côté, obtus, et les deux autres angles aigus. Les pôles tombent hors du triangle.



Dans le triangle ABC, soient AB $>$ Q, AC $=$ Q, CB $<$ Q. Prolongez les côtés AC, AB, jusqu'à leur rencontre en E. Le triangle ACE, ainsi formé aura deux côtés moindres qu'un quadrant, et un côté égal à un quadrant; les deux angles C, E aigus et l'angle B obtus. Il en résulte nécessairement pour le triangle ACB, que les angles A et B sont aigus et que l'angle C est obtus. Et de la manière dont on a prouvé pour le IV, que les pôles sont dans le triangle on prouvera que dans le cas présent, ils sont hors du triangle.

VII. Le triangle qui a les trois côtés moindres qu'un quadrant, a deux angles aigus; quant au 3ème angle il pourra être droit, obtus ou aigu. Les pôles tombent hors du triangle.

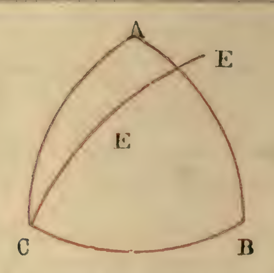
Si ce triangle n'a pas deux angles aigus, il aura deux angles droits, ou deux angles obtus ou enfin un angle droit et un angle obtus. Or ces trois hypothèses sont également impossibles.



1° Si deux angles du triangle B, C, p. e. étaient droits, A serait le pôle de BC et AB, AC seraient des quadrants, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2° Si les deux angles B, C, p. e. étaient obtus, aux points B, C, tracez les arcs de cercle BE, CE, qui fassent deux angles droits avec BC et qui se coupent en E, pôle de BC. Du point B comme pôle, avec un arc de cercle égal à EB, tracez un cercle. Celui-ci coupera le côté AB ou le côté AC à un point D, et BD sera un quadrant contrairement à l'hypothèse.

3° Que si l'on suppose un angle droit (B, p. e.) et un angle obtus (C, p. e.): Tracez un cercle qui passe par le



pôle de BC et par le point C, et soit CE un arc de ce cercle; celui-ci passera nécessairement sur le côté BA au point F, p. e. F, sera alors le pôle de BC, BF sera un quadrant et BA $<$ BF, ce qui est impossible.

Ainsi deux angles de ce triangle seront nécessairement aigus; quant au 3ème, il pourra être aigu, droit ou obtus, un quelconque de ces trois angles pouvant avoir pour côté opposé un arc de cercle moindre qu'un quadrant. Pour ce qui est des trois pôles, il est évident d'après ce que nous venons de dire, qu'ils tomberont hors du triangle.

VIII. Tout triangle dont les deux côtés sont plus grands qu'un quadrant et le 3ème plus petit qu'un quadrant, peut avoir pour angles.

1° Un angle droit et deux angles obtus.

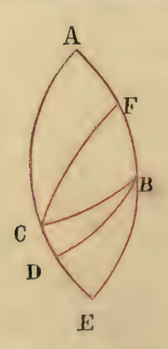
2° Un angle droit, un angle aigu, un angle obtus.

3° Un angle aigu et deux angles obtus.

4° Un angle obtus et deux angles aigus.

5° Trois angles obtus.

Quant aux cinq autres combinaisons, elles sont impossibles.



Soient, dans $\overset{\triangle}{ABC}$, $AB, AC > Q$, $BC < Q$; E le point de rencontre de AB, AC prolongés. Dans le triangle BCE ainsi formé, les trois côtés seront moindres qu'un quadrant.— 1° Si E est droit B, C, aigus, alors le triangle ABC est comme il est dit au 1° du § précédent, 2° Si c'est l'un des deux angles EBC, BCE qui est droit, et si les deux autres sont aigus, alors $\overset{\triangle}{ABC}$ est comme au 2° — 3° Si tous les trois angles du triangle BCE sont aigus, alors $\overset{\triangle}{ABC}$ est comme au 3° — 4° Si l'un des deux angles ECB, EBC est obtus, et les deux autres angles aigus, alors $\overset{\triangle}{ABC}$ sera comme il est dit au 4° — 5° Si l'angle E est obtus et les deux autres aigus $\overset{\triangle}{ABC}$ sera comme il est dit au 5°. *Cas impossibles* 1° 3 angles droits: — 2° 2 D, 1 aigu: — 3° 2 D, 1 obtus. 4° 3 aigus: 5° 1 D, 2 aigus. En effet dans les trois premières hypothèses il serait nécessaire que les trois ou les deux côtes du triangle ABC fussent des quadrants. La 4ème hypothèse entraîne que tous les cotés soient moindres qu'un quadrant; quant à la 5ème, si c'ést A qui est l'angle droit, faites passer par B à angles droits l'arc BD, qui coupera AC en D, hors du triangle. AD sera alors un quadrant et $AC > Q$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Si c'est B qui est l'angle droit, prenez sur BA, BF égal à un quadrant et tracez l'arc de grand cercle CF; F sera le pôle de BC, l'angle FCB sera droit, et l'angle ACF aigu, ce qui est absurde. Donc les cinq hypothèses ci-dessus sont impossibles.

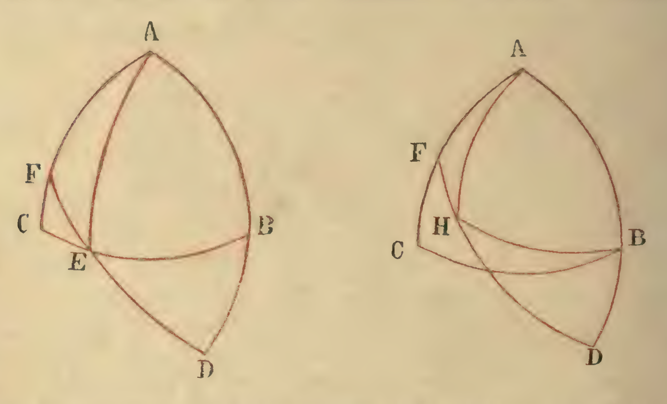
En ce qui concerne la position des pôles:

Pour le cas du 1°, le pôle de chacun des cotés de l'angle droit se trouve sur l'autre côté et le pôle du côté opposé à l'angle droit tombe dans le triangle;

Pour le 2°, le pôle du côté opposé à l'angle aigu se trouvera sur le côté opposé à l'angle obtus, dans le triangle; le pôle du côté opposé à l'angle obtus sera sur le côté opposé à l'angle aigu, hors du triangle, et il en sera de même du pôle du 3ème côté.

Pour le 3°, le pôle opposé à l'angle aigu tombera dans le triangle, et les pôles des deux autres côtés hors du triangle, comme vous pourrez aisément vous en convaincre avec un peu de réflexion.

IX. Dans tout triangle dont l'un des côtés est plus grand qu'un quadrant, et les deux autres plus petits qu'un quadrant, l'angle opposé au plus grand côté est obtus, les deux autres sont aigus. Les pôles tombent hors du triangle.



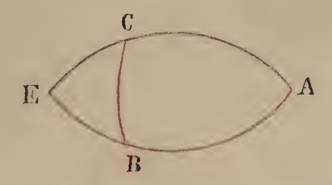
Dans le triangle ABC soient AB, AC $<$ Q, BC $>$ Q. Je dis que A sera obtus, car s'il était droit ou aigu pendant que ses côtés sont moindres qu'un quadrant, le côté BC aussi serait $<$ Q, contrairement à l'hypothèse. Également, les angles B, C seront aigus : car si B n'est pas aigu il sera droit ou obtus. Supposons-le droit; et prenons BE $=$Q; E, devient alors le pôle de BA; prolongeons AB jusqu'à ce que AD $=$ Q, et traçons les arcs AE, ED qui seront des quadrants. Si nous prolongeons ED jusqu' à F, AF sera un quadrant, contrairement à l'hypothèse d'après laquelle AC $<$ Q. — Que si nous supposons B obtus, l'angle

A aussi étant obtus, du pôle de AB traçons deux arcs de cercle passant par A et B ; le pôle tombera dans le triangle. Soit H ce pôle; prolongeons AB, jusqu'à D et BH jusqu'à F; AF sera un quadrant, car A est le pôle de DH, pendant que AC est moindre qu'un quadrant.

Le même raisonnement est valable pour C.

Quant à la position des pôles elle est suffisamment indiquée par ce que nous venons de dire.

X. Les angles d'un triangle dont chacun des côtés est plus grand qu'un quadrant sont obtus. Les pôles tombent dans l'intérieur du triangle.



Soit le triangle ABC. Prolongez les côtés AC, AB jusqu'à leur rencontre en E. Dans le triangle BCE ainsi formé, $BC > Q$, EC, $EB < Q$; donc E sera obtus et les deux autres angles aigus. Les trois angles de $\triangle$ ABC seront par conséquent obtus. Quant à la position des pôles. elle est évidente.

La discussion des dix cas que présentent les triangles sphériques eu égard à leurs côtés étant ainsi épuisée, examinons maintenant successivement les dix cas que ces triangles présentent eu égard à la grandeur de leurs angles et que nous avons énumérés plus haut. (Cf. Chap. précédent, A′, B′).

α) Tout triangle qui a ses trois angles droits a pour côtés trois quadrants et le sommet de chacun des trois angles est le pôle du côté opposé, ainsi que nous l'avons

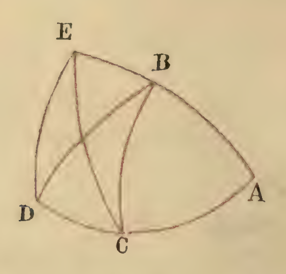
déjà établi. Un pareil triangle représente exactement le huitième partie de la surface de la sphère.

β) Tout triangle qui a deux angles droits et un angle aigu, a pour côtés de l'angle aigu deux quadrants et le côté opposé à l'angle aigu est moindre qu'un quadrant. Le sommet de l'angle aigu est le pôle du côté opposé, et les pôles de ses deux autres côtés se trouvent sur ce même côté, hors du triangle.

γ) Tout triangle qui a un angle obtus et deux droits a pour côté de l'angle obtus deux quadrants, et le côté opposé à l'angle obtus plus grand qu'un quadrant. Le sommet de l'angle obtus est le pôle du côté opposé et les pôles des deux autres côtés sont sur ce côté, dans l'intérieur du triangle.

Les trois cas qui précédent ont été déjà suffisamment discutés.

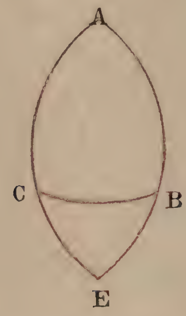
δ) Tout triangle qui a un angle droit et deux angles aigus a un côté plus grand qu'un quadrant, et les trois pôles hors du triangle. Le pôle de chaque côté de l'angle droit est situé sur l'autre côté de ce même angle.



Dans le triangle ABC, soit $A = 1$ D; — B et $C < 1$ D. Si de C nous menons un arc de grand cercle, à angles droits sur AC, il rencontrera AB en E pôle de AC; AE sera donc égal à un quadrant et $AB < Q$. On démontrera

de même que AC $<$ Q. Mais si A étant égal à 1 D, AB et AC sont moindres qu'un quadrant, alors BC sera $>$ Q.

Pour de ce qui est de la situation des pôles, elle n'a pas besoin d'être expliquée.

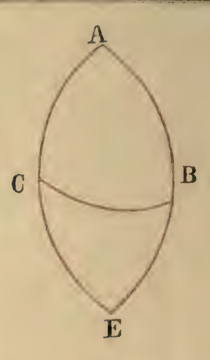


ε) Tout triangle qui a un angle droit et deux obtus, a les côtés opposés aux angles obtus plus grands que des quadrants, et le côté opposé à l'angle droit plus petit qu'un quadrant. Les pôles des deux côtés seront sur le côté opposé à l'angle droit, pendant que celui du 3ème côté tombe dans l'intérieur du triangle.

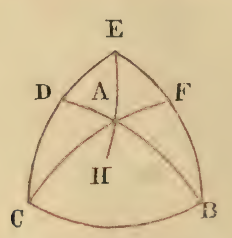
Dans le triangle ABC soient $\hat{A} = 1$ D, $\hat{B}$, $\hat{C} > 1$ D. Prolongeons AB AC jusqu'à leur rencontre en E. Dans le triangle BEC, on aura un angle droit et deux aigus; ses côtés seront $<$ Q. Par conséquent dans le triangle ABC, AB, AC, seront chacun plus grand qu'un quadrant, tandis que BC sera $<$ Q.

Pour ce qui de la situation des pôles elle est claire.

ϛ') Tout triangle qui a un angle droit, un angle obtus et un angle aigu, aura le côté opposé à l'angle aigu $<$ Q, et les deux autres côtés $>$ Q. Le pôle du côté opposé à l'angle aigu sera sur le côté opposé à l'angle obtus dans l'intérieur du triangle, le pôle du côté opposé à l'angle obtus sera sur le côté opposé à l'angle aigu, hors du triangle, et le pôle du côté opposé à l'angle droit sera de même situé hors du triangle.



Dans le triangle ABC soient $\hat{A} < 1$ D; $\hat{B} = 1$ D; $\hat{C} > 1$ D. Prolongeons AC, AB jusqu'en E. Dans $\triangle$BCE, $\hat{B} = 1$ D; $\hat{C}$ et $\hat{E} < 1$ D, et les côtés seront $<$ Q. Donc dans $\triangle$ABC, AB, AC $>$ Q, CB $<$ Q. Or de ce que $\widehat{ABC} = 1$ D et BC $<$ Q, le pôle de AB sera situé sur BC hors du triangle; et, de ce que AB $>$ Q, le pôle de BC sera sur AB, dans l'intérieur; enfin l'angle A étant aigu le pôle de CB sera hors du triangle.



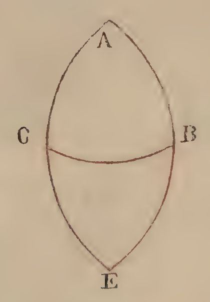
ζ) Tout triangle qui a ses trois angles aigus, aura ses côtés moindres que des quadrants et ses pôles tomberont hors du triangle.

Soit le triangle ABC. Des points B, C, menez à angles droits sur BC deux arcs qui se coupent en E, pôle de CB; BE sera $=$ Q. Par EA décrivons l'arc de grand cercle EAH. Si BA était égal à un quadrant, B serait le pôle de EH et l'angle BAH serait droit, contrairement à l'hypothèse. Que si BA $>$ Q, dans le triangle BAE, BE étant égal à

un quadrant AB $>$ Q et EA $<$ Q, on aura $\widehat{BEA} > 1$ D. $\widehat{BAE} < 1$ D; et par conséquent $\widehat{BAH} > 1$ D. Tandis que $\widehat{BAC}$ est par hypothèse < 1 D — Donc BA ne peut être que $<$ Q. On prouvera de même que AC $<$ Q. Mais $\hat{A}$ étant aigu et ses côtés $<$ Q, le côté BC qui lui est opposé sera aussi $<$ Q. Ainsi tous les trois côtés de ce triangle sont moindres qu'un quadrant.

La position des pôles est évidente.

η) Tout triangle qni a un angle aigu et deux obtus a les côtés opposés à ces derniers, plus grands que des quadrants, et le côté opposé à l'angle aigu $<$ quadrant. Le pole de ce dernier est dans le triangle, tandis que les pôles des deux autres côtés tombent hors du triangle.



Dans le triangle ABC, soient A $<$ 1 D, B et C $>$ 1 D.

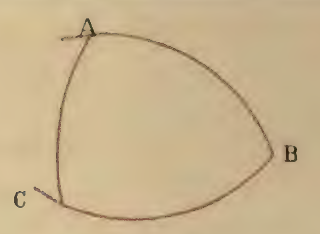
Prolongez jusqu'à la rencontre en E. Le triangle BEC sera acutangle et aura ses côtés $>$ quadrants. Donc etc.

La position des pôles ést évidente.

θ) Tout triangle qui a ses trois angles obtus a deux côtés $>$ Q, pendant que le 3ème côté peut être droit, aigu, ou obtus.

Les pôles tombent dans le triangle

Dans le triangle obtusangle ABC, si les trois côtés étaient plus petits que des quadrants — ou bien si les deux étant

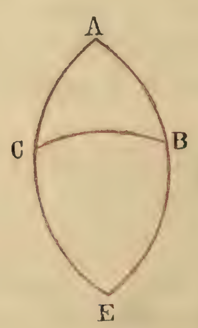


chacun moindres qu'un quadrant l'autre était égal à un quadrant, plus grand ou plus petit; ou si un côté étant $> Q$ un second côté était $= Q$ et le troisième $< Q$, le triangle aurait eu deux angles aigus. Si deux de ses côtés étaient égaux chacun à un quadrant, le triangle aurait eu deux angles droits; hypothèses toutes également inadmissibles. Donc etc.

La position des pôles ne peut faire difficulté.

ι) Tout triangle qui a un angle obtus et deux angles aigus, pourra avoir.

1° Tous ses trois côtés < quadrant.
2° Deux côtés chacun $< Q$ et le 3ème $= Q$.
3° » » » $< Q$ » » $> Q$.
4° » » » $> Q$ » » $< Q$.
5° Un côté $= Q$; 1 côté $> Q$; 1 côté $< Q$.
Quant aux autres cas ils sont impossibles.
Les pôles tombent hors du triangle.



En effet. – Dans le triangle ABC, soient $\hat{A} > 1$ D· $\hat{B}$ et

$\hat{C} < 1$ D. Prolongez jusqu'à la rencontre en E. Le triangle CBE, aura ses trois angles obtus ses deux côtés chacun $> Q$, et un côté indifférent. Si donc.

$BC < Q$,	nous serons	quant au	triangle ABC	dans le	cas du	1°
$BC = Q$,	»	»	»	»	»	2°
$BC > Q$,	»	»	»	»	»	3°

Si l'un des deux côtés BE, $CE < Q$ le triangle ABC rentrerait dans le 4°.

Si l'un des deux côtés BE, $CE = Q$ le triangle ABC rentrerait dans le 5°

Cas impossibles: 1° Les côtés sont des quadrants. — 2° Deux côtés $= Q$ et le 3ème $< Q$; — 3° Deux côtés $= Q$ et le 3ème $> Q$. (car dans ces cas les deux ou les trois angles devraient être droits) — 4° Les trois côtés sont chacun $> Q$. — 5° Les deux côtés, chacun $> Q$ et le 3ème $= Q$. (car dans ces deux derniers cas les angles devraient être obtus).

Inutile de rien ajouter quant aux pôles.

L'analyse des différents cas qui précède est résumée dans le tableau ci-après. [1]

---

(1) Ce tableau donne les différentes combinaisons qu'on peut faire des dix catégories de triangles sphériques considérés par rapport à la grandeur de leurs côtés (I.....X) avec les dix catégories de ces mêmes triangles considérés par rapport à la grandeur de leurs angles (α....ι). — Les lettres I i = impossible. N n = nécessaire. P p = possible. La majuscule indique que nous connaissons la grandeur des angles et que la correspondance de telle ou de telle catégorie de côtés avec les grandeurs des angles données est impossible, nécessaire ou seulement possible. Les petites lettres tout au contraire indiquent que nous connaissons la grandeur des côtés et qu'avec cette grandeur des côtés, telle ou telle grandeur d'angles est possible, nécessaire ou impossible. — Ainsi la catégorie ι (2 aigus, 1 obtus, donne IV. P — VI. P — VII. P. VIII. P — IX P c'est-à-dire cinq cas possibles en ce qui concerne la grandeur des côtés; et cinq cas I = impossibles. Ce qui est conforme à l'analyse donnée précédemment sous ι) — Que si on prend la colonne VII p. e on trouve δ, p. — ζ p. ι. p. etc.

Les 10 espèces de triangles Sphériques eu égard à la grandeur de leurs côtés. Cf. Chap. II. A (B). / Les 10 espèces de triangles Sphériques eu égard à la nature de leurs angles. Cf. Chap. II. A′ (B′).	I Chaque côté = quadrant.	II 2 quadrants–1 < quadrant.	III 2 quadrants–1 > quadrant.	IV 1 = quadrant–2 < quadrant.	V 1 = quadrant–2 > quadrant.	VI 1–quadrant–1 > quadrant–< 1 quadrant.	VII 3 côtés chacun < quadrant.	VIII 2 côtés chacun > quadrant, 1 < quadrant.	IX 2 côtés chacun < quadrant, 1 > quadrant.	X 3 côtés chacun > quadrant.
α { 3. Angles droits.	N n	I i	I i	I i	I i	I i	I i	I i	I i	I i
β { 2. Angles droits. 1. Angle aigu.	I i	N n	I i	I i	I i	I i	I i	I i	I i	I i
γ { 2. Angles droits. 1. Angle obtus.	I i	I i	N n	I i	I i	I i	I i	I i	I i	I i
δ { 1. Angle droit. 2. Angles aigus.	I i	I i	I i	I i	I i	I i	P p	I i	I i	I i
ε { 1. Angle droit. 2. Angles obtus.	I i	I i	I i	I i	I i	I i	I i	P n	I i	I i
ϛ { 1. Angle droit. 1. Angle obtus. 1. Angle aigu.	I i	I i	I i	I i	I i	I i	I i	P n	I i	I i
ζ { 3. Angles aigus.	I i	I i	I i	I i	I i	I i	P p	I i	I i	I i
η { 1. Angle aigu. 2. Angles obtus.	I i	I i	I i	I i	I i	I i	I i	P n	I i	I i
θ { 3. Angles obtus.	I i	I i	I i	I i	P n	I i	I i	P p	I i	P n
ι { 2. Angles aigus. 1. Angles obtus.	I i	I i	I i	P n	I i	P p	P p	P p	P n	I i

CHAPITRE IV.

De la manière par laquelle on peut arriver à connaître les éléments inconnus du triangle sphérique en se servant des éléments connus.

Nous avons déjà démontré que la connaissance d'un des huit triangles formés par les intersections de trois grands cercles sur la surface d'une sphère entraîne la connaissance de tous les autres et qu'il y a en tout cinq espèces d'intersection.

La première espèce consiste à supposer (Cf. Chap. II. B. I.– B′. I.) que les trois côtés sont des quadrants, ou que les trois angles sont droits. Ici tout est connu et il ne reste rien à trouver.

La seconde espèce est celle 1° de quatre triangles chacun desquels a deux côtés égaux à un quadrant et le 3ème moindre qu'un quadrant (B II.) ou de deux angles droits et un angle aigu, (B′ II), 2° de quatre autres triangles ayant deux côtés égaux chacun à un quadrant et un côté plus grand qu'un quadrant, ou bien ayant deux angles droits et un angle obtus.— Le côté et l'angle inconnus ne font dans ce cas qu'une inconnue sans relation avec les éléments connus. Si cette inconnue est donnée il ne reste plus rien à chercher, et si elle n'est pas donnée il n'y a pas moyen de la trouver. Ainsi dans ce second cas aussi toute recherche est inutile. Cette recherche n'est réellement utile que dans les autres trois cas, où la connaissance d'un triangle d'une espèce quelconque conduit à la connaissance de tous les autres triangles.

Parlons d'abord du triangle qui a deux ou trois côtés moindres qu'un quadrant et deux ou trois angles aigus. Ainsi en considérant les côtés on aura un triangle dont les deux côtés seront moindres qu'un quadrant et le 3ème plus petit ou plus grand qu'un quadrant ou égal à un quadrant. Ce qui fait trois cas. De même eu égard aux angles, on aura un triangle dont les deux angles seront aigus et le 3ème aigu droit ou obtus. Ce qui fournit encore trois cas. — Or les trois premiers entraînent les trois autres, sans que l'inverse soit vrai. Car le triangle qui a deux côtés plus petits qu'un quadrant et le 3ème égal à un quadrant, et celui dont les deux côtés sont moindres qu'un quadrant et le 3ème $>$ qu'un quadrant auront nécessairement deux angles aigus et un obtus: et quant à celui qui a ses trois côtés moindres qu'un quadrant, il aura deux angles aigus, le 3ème pouvant être égal à un droit, plus grand ou plus petit qu'un droit. De même le triangle qui a ses angles aigus ou qui a deux aigus et un droit, aura nécessairement ses côtés moindres qu'un quadrant; celui qui a deux angles aigus et un angle obtus peut bien être quant à ses côtés un des trois premiers, ou bien autre que ceux-là, et cela de deux manières: deux côtés plus grands qu'un quadrants et le 3ème plus petit, ou bien un côté $=$ 1 quadrant; un côté $<$ 1 quadrant; un côté $>$ 1 quadrant.

Ceci étant ainsi, nous avons suffisamment parlé de ce qui concerne le triangle acutangle, rectangle et obtusangle.

Or, dans chaque triangle il y a à considérer trois angles et trois côtés: six choses en tout; et si vous connaissez trois quelconques de ces six, vous connaîtrez les trois autres, d'après la méthode ordinaire des quatre parties proportionnelles. Dans le triangle qui a tous ses angles droits, l'angle droit remplace les trois connus, et on n'a plus besoin de rien connaître, mais dans les autres triangles il est indispensable de connaître trois choses.

Il nous reste maintenant à faire connaître les différentes espèces de proportions. Les modernes suivent à cet égard deux règles. L'une est celle de la figure dite *supplémentaire* ([1]), parcequ'elle supplée à la connaissance du quadrilatère et en dispense pour la détermination des arcs inconnus, sans qu'on ait besoin de recourir aux distinctions nécessaires dans la théorie du quadrilatère et des rapports composés. L'autre est celle de la figure dite *ombrée* ([2]) qui dans la plupart des recherches remplace le quadrilatère et dispense aussi de tout ce dont la figure supplémentaire dispens elle-même. Cette seconde figure fournit parfois dans la pratique plus de facilités que la figure supplémentaire. Mais le contraire aussi peut bien arriver. C'est ce qu'on comprendra lorsque nous aurons exposé ce qui concerne ces figures, d'après les principes qui ont été établis par les maîtres.

CHAPITRE V.

De la figure dite supplémentaire et de ses différentes espèces.

Cette discussion a pour point de départ le principe suivant: Les rapports des sinus des cotés des triangles formés sur la surface d'une sphère par l'intersection d'arcs de grands cercles sont égaux aux rapports des sinus des angles opposés à ces cotés.

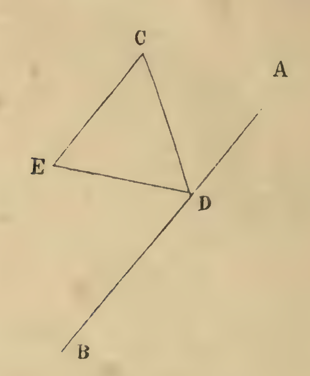
On commence ordinairement par établir ce principe en ce qui concerne le triangle rectangle et l'on suit à cet effet

(1) الشكل المغنى

(2) الشكل الظلى

différentes voies qui sont toutes exposées dans le livre du savant Abou-Rihan-Albirouni intitulé. «Les clefs de la connaissance des figures superficielles sphériques et autres». [1] Les systèmes dont je parle offrant des différences, j'en ai pris ce qui m'a paru de plus probant, afin de rendre ce traité aussi court et démonstratif que possible, ét j'ai commencé par la méthode de l'Emir-Abou-Nasr Ali-ben-Irak [2]. D'après l'opinion d'Abou- Rihan, c'est lui en effet qui le premier a réussi à faire de sa méthode une application générale à tous les cas, bien que deux autres savants Aboul-Véfa Mehmet-ibn-Mehmet Albouzdjany et Abou-Mahmoud-Hamid-Ibn-Alhazar Alhodjendy [3] lui disputent sur ce point la priorité. Quoiqu'il en soit Abou-Nasr fait précéder son exposition d'une introduction qui quoique pas absolument indispensable dans l'étude de cette figure, n'en est pas moins utile.

Cette introduction la voici.



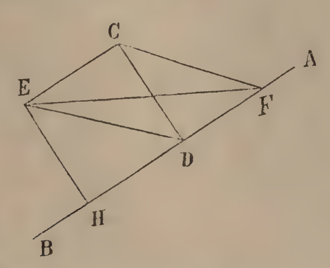
Proposition préliminaire. Soit AB la ligne d'intersection de deux plans qui font entre eux un angle dièdre autre qu'un angle droit. Prenez sur l'un de ces plans le point C

(1) عليها مذاهب جمعها الاستاذ ابو الريحان البيرونى فى كتاب له سماه مقاليد علم هياه مايحدث فى بسيط الكره وغيره

(2) الامير ابو نصر على بن عراق

(3) ابو الوفا محمد بن محمد البوزجانى وابو محمد حامد بن لخضر الخجندى

et menez CE perpendiculaire sur l'autre plan et CD perpendiculaire sur la ligne d'intersection. Joignez ED; je dis que ED sera perpendiculaire à AB.



Démonstration. Prenez sur AB un point F quelconque, menez CF, et EF. CE étant perpendiculaire au plan dans lequel se trouve le point E, et EF, ED se trouvant dans ce plan, les angles CED, CEF sont droits. Il en est de même de l'angle CDF. Le côté CF étant ainsi opposé aux deux droits CEF, CDF, son carré sera égal à la somme des carrés de CE et EF, et aussi à la somme des carrés de CD, DF. D'ailleurs $\overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{ED}^2$. Donc $\overline{CF}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{ED}^2 + \overline{DF}^2$. Mais on a aussi $\overline{CF}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{EF}^2$. Donc $\overline{CE}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{DF}^2$. d'où retranchant de part et d'autre $\overline{CE}^2$, on aura $\overline{EF}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DF}^2$, ce qui prouve que ED est perpendiculaire sur AB. C Q. F. D.(1)

Autre démonstration d'Abou Rihan. Prenez du côté de DB, DH = DF; joignez CH, EH. Les triangles CDH, CDF (CD commun, HD = DF, $\widehat{CDA} = \widehat{CDF} = 1$ D) sont égaux, et CH = CF. Les triangles CEF, CEH (EC commun, $\widehat{CEH} = \widehat{CEF} = 1$ D, puisque CE est perpendiculaire au plan, CH = CF) aussi sont égaux et par conséquent EH = EF. Comparant maintenant les deux triangles EDH, DEF on a EH = EF; DH = DF; ED commun, donc ces deux triangles sont égaux et $\widehat{EDH} = \widehat{EDF} = 1$ D. Donc ED est perpendiculaire sur AB. C. Q. F. D. — Cela posé, passons maintenant à l'exposition que nous avons en vue.

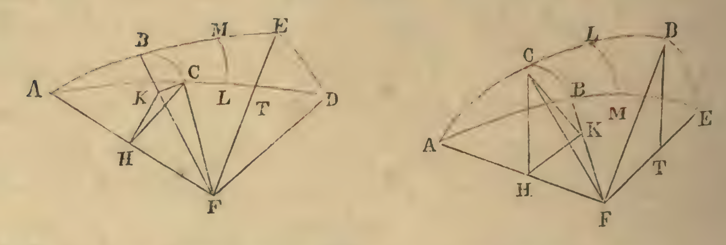
(1) Ce passage est mal rendu dans le manuscrit,

De la figure supplémentaire.

Soit le triangle ABC formé par trois arcs de grands cercles et dont l'angle B = 1 D.

Je dis que le rapport du sinus de l'arc AC opposé à l'angle droit, au sinus de l'arc BC opposé à l'angle A, est égal au rapport du plus grand sinus, (du rayon, sinus de l'angle droit B) au sinus de l'angle A

$$\frac{\sin\ AC}{\sin\ BC} = \frac{R}{\sin\ \widehat{BAC}} = \frac{\sin\ \widehat{ABC}}{\sin\ \widehat{BAC}}.$$



N. B. Les deux figures sur lesquelles on pourra également suivre les explications du texte ne diffèrent qu'en ce que dans l'une l'angle droit B se trouve dans le plan horizontal, tandis que dans l'autre cet angle est dans le plan qui coupe le plan horizontal. Les figures du manuscrit ne sont pas correctes.

Démonstration. Prolongez les arcs AC, AB jusqu'à ce que vous ayez deux quadrants AE, AD, et par les points D, E, faites passer un arc de grand cercle qui mesurera l'angle A.

Soit F, le centre de la sphère; menez les rayons FA, FB, FE, FD.

FD sera perpendiculaire sur AF, AD étant un quadrant;

FA sera l'intersection des deux plans des cercles AD, AE.

Du point C menez CH perpendiculaire sur AF; cette perpendiculaire étant dans le plan du cercle ACD, sera le sinus de l'arc AC; et CH, DF étant ainsi dans le même plan perpendiculaire sur AF seront parallèles.

Des points C, D, tirez CK (dans le plan du cercle CB) perp. sur BF. (rayon, intersection des plans AE, CB). — et DT (dans le plan du cercle DE) perp. sur EF (rayon, intersection des plans DE, AE).

Ces deux lignes CK, et DT seront perpendiculaires au plan du cercle AE (DE, CB étant deux plans perpendiculaires au plan AE, comme cela est expliqué dans les éléments d'Euclide) et par conséquent DT = sinus arc DE qui mesure l'angle A; tandis que CK = sinus arc BC.

Menez maintenant CKH; cette ligne sera perpendiculaire sur AF, ainsi que cela a été démontré dans l'introduction ci-dessus.

Dans les triangles CKH, DTE, DT et CK seront parallèles comme perp. au plan AE.

DF et CH seront parallèles comme perp. à la ligne AF (et les plans DTF, CKH étant ainsi parallèles) les angles $\widehat{TDF}$ $\widehat{KCH}$ seront égaux, d'après ce qui est établi dans les éléments. D'ailleurs $\widehat{DTF} = \widehat{CKH} = 1$ D; donc les deux triangles CKH, DTF sont semblables.

On peut dire aussi que KH et TF sont parallèles d'après ce qui a été démontré dans l'introduction, et que les triangles TDF, CKH sont semblables comme ayant leurs côtés homologues parallèles.

Donc $\frac{\text{CH} = \text{sinus de l'arc AC}}{\text{DF} = \text{rayon} = \text{sinus de l'angle droit B}} = \frac{\text{CK} = \text{sinus de l'arc BC}}{\text{DT} = \text{sinus de l'angle A}}$, et en intervertissant $\frac{\sin \text{AC}}{\sin \text{BC}} = \frac{\sin \text{B} = \text{R} = \sin \widehat{\text{ABC}}}{\sin \widehat{\text{BAC}}}$

C. Q. F. D.

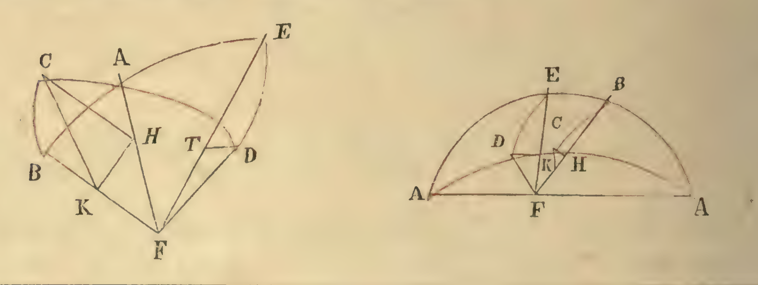
Ce qui précède prouve en outre que si nous faisons passer par un point autre que C, par le point L. p. e. un arc de grand cercle perpendiculaire à l'arc AE on aura

$\frac{\sin \text{LM}}{\sin \text{LA}} = \frac{\sin \text{BC}}{\sin \text{AC}}$.

Dans ces sortes de triangles on a l'habitude d'appeler l'arc BC *inclinaison* de l'arc AC laquelle inclinaison BC n'est que la part de l'arc AC dans l'inclinaison totale du cercle AD au cercle AE, que mesure l'angle A. (1) Et si l'on rapporte l'arc BC à l'arc AB, alors on appelle (BC) l'inclinaison deuxième. C'est ce qu'Abou Rihan appelle la largeur; de sorte que l'arc BC serait l'inclinaison première par rapport à AC, et l'inclinaison deuxième par rapport à l'arc AB ou l'inclinaison par rapport à l'arc AC et la largeur par rapport à l'arc AB. Dans cette manière de s'exprimer on dirait (2) que les rapports des sinus des inclinaisons sont égaux aux rapports des sinus de leurs arcs et que le rapport du sinus d'une inclinaison quelconque au sinus de son arc est égal au rapport du sinus d'une autre inclinaison au sinus de son arc. (3)

Si le triangle ABC ne s'applique pas au triangle DAE (4), mais que cependant l'angle A soit égal dans ces deux triangles et que les angles B et E soient droits, le théorème n'en demeure pas moins prouvé.

Ainsi qu'on peut le vérifier sur les figures suivantes qui ont été tracées dans cette hypothèse (5)



(1) وهو حصة قوس آح من غاية ميل دائرة آه عن دائرة آى الذى يكون بقدر زاوية آ

(2) En considérant dans les figures précédentes BC et EM comme les inclinaisons, et en reprenant la dernière égalité qui donne $\frac{\sin BC}{\sin LM} = \frac{\sin AE}{\sin LA}$.

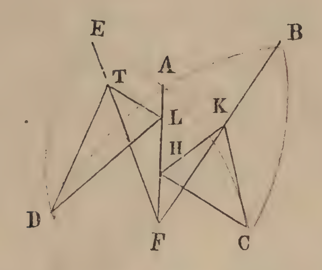
(3) Voyez pour la formule de ces *inclinaisons* la 3ème démonstration ci-après: *Autre démonstration de l'Emir Abou Nasr* à la fin.

(4) Par superposition comme cela était le cas dans les figures précédentes.

(5) Il suffirait pour cela en effet d'appliquer la démonstration précédente à ces nouvelles figures.

Une autre conséquence qui résulte de ce qui précède est que dans tous les triangles formés par des arcs de grands cercles qui comparés entre eux ont un angle égal et un angle droit, le rapport $\frac{\text{sinus de l'arc opposé à l'angle droit}}{\text{sinus de l'arc opposé à l'angle égal}}$ est constant, étant toujours égal au rapport $\frac{\text{sinus de l'angle droit} = \text{R}}{\text{sinus de l'angle égal.}}$

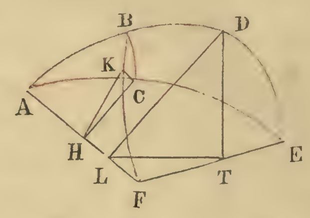
Telle est la démonstration qu'en ont donnée Abou Nasr et Aboul Véfa qui se sont seulement servis d'expressions différentes.



Autre procédé de l'Emir Abou Nasr dans l'exposé de cette démonstration. Ce procédé consiste à placer les deux triangles non superposables de manière que les deux angles droits soient d'un même côté et que les angles égaux soient opposés par le sommet. (Dans la figure ci-contre E et B sont les angles droits des deux triangles ABC, ADE) ceci fait je dis que $\frac{\sin \text{ BC}}{\sin \text{ AC}} = \frac{\sin \text{ ED}}{\sin \text{ DA}}$.

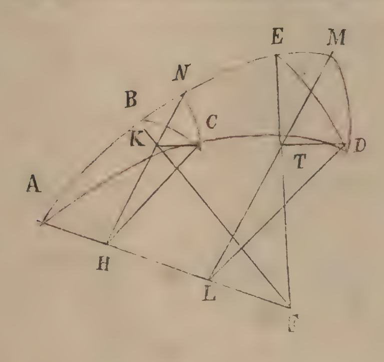
Démonstration. Tirez les rayons AF, BF, EF, chacun de ces rayons est l'intersection des plans de deux des cercles déterminés par les arcs dont se compose la figure. Du point C dans le plan du cercle BC menez CK perpendiculaire à BF, intersection des grands cercles CB, BD. Ces deux cercles ayant leurs plans perpendiculaires, CK sera perpendiculaire au plan DB. De même du point D et dans le plan du cercle DE (lequel est perpendiculaire à celui du cercle

EC). nous menons DT perpendiculaire sur EF et par conséquent perpendiculaire aussi au plan EC. Du point C et dans le plan du cercle AC nous abaissons sur l'intersection des deux plans AF la perpendiculaire AH, et nous joignons HK. Nous aurons ainsi formé le triangle CKH rectangle en K. De la même manière nous formons le triangle DTL rectangle en T. Dans les triangles CKH, DTL, les côtés CH, TL, sont dans le plan du cercle EC perpendiculaires à AF; (CH, est en effet une perpendiculaire que nous avons menée de C à H; quant à TL, cette ligne sera perpendiculaire en vertu du principe posé dans l'introduction); de même DL, KH seront perpendiculaires à AF, dans le plan du cercle BD; donc les angles L et H seront égaux; et à cause des angles K, T, qui sont droits les triangles $\overset{\triangle}{\mathrm{DTL}}$, $\overset{\triangle}{\mathrm{HKC}}$ seront semblables, et $\dfrac{\mathrm{CK} = \text{sinus de l'arc BC}}{\mathrm{CH} = \text{sinus de l'arc AC}} = \dfrac{\mathrm{DT} = \text{sinus de l'arc DE}}{\mathrm{DL} = \text{sinus de l'arc AD}}$. C. Q. F. D.



Que si nous plaçons les triangles de manière à ce qu'ils coincident, on aura la figure ci-contre, et on pourra y appliquer la démonstration précédente. Si maintenant dans cette figure nous supposons que AD, AE, sont des quadrants, le point L tombera sur le point F (le centre) et l'on aura $\dfrac{\sin\ \mathrm{BC}}{\sin\ \mathrm{AC}} = \dfrac{\text{sinus de l'angle A}}{\text{sinus de l'angle droit}}$.

Autre démonstration, également de l'Emir Abou Nasr. Reprenons les deux triangles ABC, ADE; nous faisons de A un angle commun pendant que B et E sont des angles droits.



Du point A, comme pôle avec un arc égal à AC nous décrivons l'arc CN; et avec un arc égal à AD, nous décrivons l'arc DM. Ces deux arcs de petits cercles seront parallèles, comme décrits d'un même point comme pôle; et situés qu'ils sont entre arcs de grands cercles AD, AE passant par ce pôle, ils seront semblables ainsi que cela est prouvé dans les Sphériques de Théodose; leurs plans seront perpendiculaires sur les plans des grands cercles passant par leur pôle; et leurs centres seront sur l'axe AF; tirons NH, CA (dans le plan du petit cercle CN) H sera le centre du petit cercle et NH, CH deux rayons. Maintenant AF étant perpendiculaire sur le plan du petit cercle, NHA, CHA seront deux angles droits; De même des points D et M tirons les rayons DL, ML du petit cercle MD, dont L sera le centre; ceci fait, des points D, C, tirons dans les plans des deux petits cercles, DT, CK perpendiculaires aux intersections des plans des petits cercles et du cercle AE (lignes ML, NH); ces deux lignes seront perpendiculaires au plan du cercle AE; (car les plans des petits cercles lui sont perpendiculaires); et chacune d'elles formera la ligne d'intersection entre leur petit cercle et le grand cercle; (ainsi DT sera évidemment la ligne d'intersection des plans du petit cercle DM et du grand cercle DE; CK sera évidemment la ligne d'intersection des plans du petit cercle CN et du grand cercle CB); Mais les points

E, T, F, se trouvant à la fois dans les plans des cercles ED, EA, seront sur une même ligne droite ETF, = rayon de la sphère; et il en sera de même des trois points B, K, F, d'où BKF = rayon de la sphère; et ainsi chacune des perpendiculaires sera à la fois sinus d'un arc de petit cercle et d'un arc de grand cercle (DT = sinus DM et sinus DE; CK = sinus CN et = sinus CB. Or les rapports des sinus des arcs semblables des différentes espèces de cercles, à leurs rayons étant toujours égaux, on aura

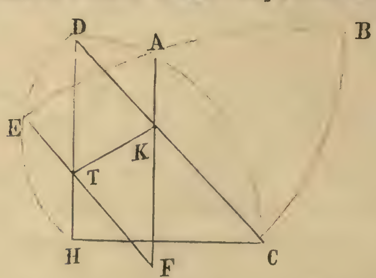
$$\frac{DT = \text{sinus DM}}{DL = \text{rayon du petit cercle}} = \frac{CK = \text{sinus CN}}{CH = \text{rayon du petit cercle}}.$$

Mais DT = sinus DE, DL = sinus DA; CK = sinus CB; CH = sinus CA; donc $\frac{\text{sin DE}}{\text{sin DA}} = \frac{\text{sin CB}}{\text{sin CA}}$, ou bien rapport,

$$\frac{\text{du sinus de chaque inclinaison}}{\text{au sinus de son arc}} = \frac{\text{sinus d'une autre inclinaison}}{\text{sinus de son arc}}$$

$$= \frac{\text{sinus de l'angle A}}{R = \text{sinus de l'angle droit}}$$ (cette dernière égalité, supposant bien entendu que AE, AD sont des quadrants) C. Q. F. D. [1]

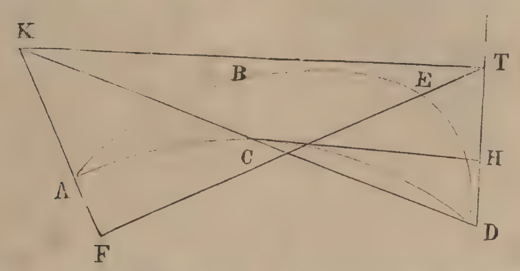
Autre démonstration d'Aboul_Vefa Elbouzdjani.



Reprenons les deux triangles ABC, AED, (l'angle A, égal les angles B, E droits); et plaçons les de manière que les A soient ou opposés par le sommet ou superposés. Sur le plus grand côté DE nous prenons une portion EH égale au plus

(1) V. pour la definition des *inclinaisons* la 1ere démonstration.

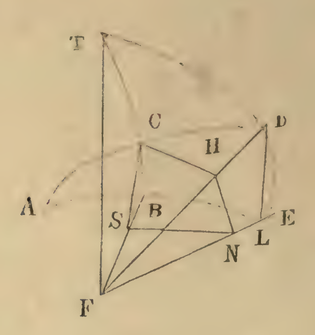
petit côté BC; tirez HC. Les plans des cercles HE, CB, étant perpendiculaires sur celui du cercle AE, CH sera parallèle au plan de ce dernier cercle, et les perpendiculaires tirées de C et de H, seront sur lui. Ces perpendiculaires d'ailleurs ne sont autres que les sinus des arcs égaux CB, HE.



Joignez les cordes DH, DC, et menez les rayons FE, FA. La corde DH et le rayon FE se trouvant sur le même plan (celui du cercle DE) sans que l'arc DE soit plus grand qu'un quadrant, se couperont. Également la corde DK et le rayon FA qui se trouvent dans le plan du cercle DC, se rencontreront en K, TK sera l'intersection des plans DCH et EB. Menez TK, les deux lignes HC, TK qui se trouvent dans le même plan ne se rencontrent pas, elles seront donc parallèles. Or $\frac{DT}{TH} = \frac{DK}{KC}$. Mais, ainsi qu'il a été démontré dans l'introduction du quadrilatère sphérique, $\frac{DT}{TH} = \frac{\sin DE}{\sin EH = BC}$ et $\frac{DK}{KC} = \frac{\sin DA}{\sin AC}$, donc $\frac{\sin DE}{\sin BC} = \frac{\sin DA}{\sin AC}$. c'est-à-dire que le rapport des sinus des inclinaisons est égal à celui des sinus de leurs arcs. De sorte que si nous supposons AE, AD égaux à des quadrants, on aura le rapport $\frac{\text{sinus de toute inclinaison}}{\text{sinus de son arc}} = \frac{\text{sinus de l'angle A}}{\text{sinus de l'angle droit}}$ C. Q. F. D.

Autre démonstration. Dont ont fait usage Aboul Fazl Ennirizy dans son commentaire sur l'Almageste, et Abou

Djafer Alhazin dans son Livre intitulé « Recherches partielles sur l'inclinaison des inclinaisons et introduction sur la sphère droite » avant que ces deux savants aient entendu substituer la figure supplémentaire à celle du segment [1].



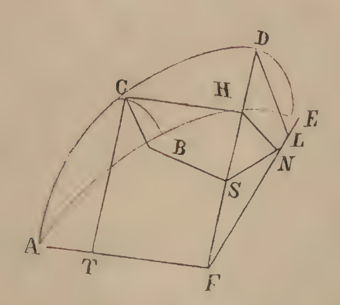
Soit le triangle ABC formé par des arcs de grands cercles, dans lequel angle B = 1 D. Prolongeons les côtés AB AC jusqu'à ce que AD, AE soient égaux à deux quadrants. Du point A comme pôle décrivons l'arc DE et prolongeons jusqu'à ce qu'il se rencontre avec le côté BC prolongé au point T. Ce point sera le pôle de l'arc AE. De F, centre de la sphère nous menons les rayons FT, FB, FD, FE — TB, TE étant des quadrants, les angles TFE, TFB seront droits et TF sera perpendiculaire sur le plan du cercle AE. Du point C nous abaissons sur le rayon DF la perpendiculaire CH. Les plans des deux cercles AD, DE se coupant à angles droits sur la ligne d'intersection, DF sera perpendiculaire sur le plan du cercle DE. Egalement de C nous abaissons sur BF, intersection des cercles AB, BC la perpendiculaire CS, et enfin HN perpendiculaire (dans le plan du cercle DE) à l'intersection EF; — CS et HN

---

(1) برهان اخر استعمله ابو الفضل النيريزى فى شرح المجسطى وابو جعفر الخازن ايضاً فى مطالب جزويه ميل الميول الجزوية والمطالع فى الكرة المستقيمة

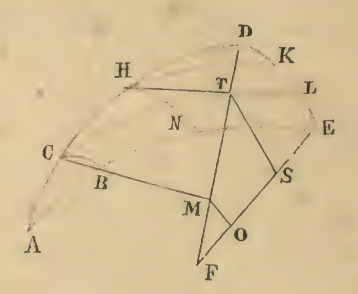
Le mot *Ennirizi* ne se lit pas bien distinctement, et quant au titre du livre d'Abou Djafer il est assez obscur.

étant perpendiculaires, dans le plan de deux cercles, coupant à angles droits le plan du cercle ABE, à l'intersection de ces cercles, seront perpendiculaires au plan ABE et parconséquent parallèles. Ou bien, nous pouvons dire aussi que les droites CS, TF étant dans le même plan, perpendiculaires à l'intersection, seront parallèles; que par la même raison TF, HN seront parallèles, et que dès lors CS, HN sont parallèles. — Joignons NS. Les angles HNS, CSN seront droits nécessairement. Mais CH étant perpendiculaire au plan du cercle DE, et HN se trouvant dans ce plan, l'angle CHN aussi sera droit et CHNS sera un parallèlogramme. De D abaissons DL perpendiculaire à FE, alors DL, HN seront parallèles les triangles DLF, HNF seront semblables et l'on aura $\frac{LD}{DF} = \frac{NH}{HF}$. Or $LD = \sin DE$, pendant que arc DE mesure l'angle A; $DF = R =$ sinus de l'angle droit; $NH = CS = \sin BC$; — $HF = \sin CA$, par la raison que CH est perpendiculaire sur le rayon DF et AC est le supplément de DC: donc $\frac{\sin DE = \sin A}{\sin B = R} = \frac{\sin BC}{\sin AC}$ C. Q. F. D.



Autre procédé, dû à Abou Mahmoud Alhodjendy. Ce procédé se rapproche beaucoup de la démonstration précédente. On pourrait même dire qu'il n'en diffère guère. Reprenons le triangle ABC et achevons les deux quadrants AE, AD; tirons les rayons FA, FB, FD, FE. On prouvera que AF perpendiculaire au plan du cercle DE est perpendiculaire

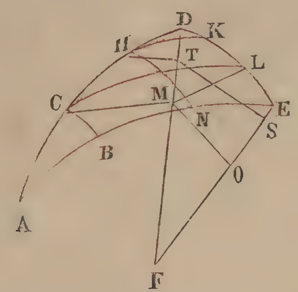
aux rayons FD, FE. Menons CH, perpendiculaire sur le plan DE et CS, HN perpendiculaires au plan du cercle ABE. Joignons NS. On prouvera que CH, NS sont parallèles et qu'elles font des angles droits – Menons DL perpendiculaire; on prouvera que cette ligne est parallèle à HN et qu'ainsi les triangles DLF, HND sont semblables. Menons encore dans le plan du cercle AD, la ligne CT, perpendiculaire à l'intersection commune AF; elle sera parallèle à HF; les angles F, T, seront droits; l'angle CHF sera droit aussi (CH étant perpendiculaire sur FD), et CHFT, constituera ainsi un rectangle. Maintenant $\frac{FH = HT = \sin\ AC}{HN = CS = \sin\ CB} = \frac{FD = R = \sin \text{ de } 1\ D}{DL = \sin \text{ de l'angle } A}$ Si vous supposez sur l'arc AD un tout autre point quelconque, la conclusion sera absolument la même. De sorte que nous pouvons dire le rapport des sinus des arcs est égal au rapport des sinus des inclinaisons C. Q. F. D.



Autre démonstration d'Abou Rihan. Reprenons le triangle ABC et achevons les quadrants AD, AE. Prenons sur l'arc AD un point H autre que C, et par ce point menons à angles droits sur AE, l'arc de grand cercle HN; les angles B, N, seront droits. Prenons le pôle de l'arc AE et traçons deux arcs de petits cercles CL, HK, l'un passant par le point C et l'autre passant par le point H; ces arcs seront parallèles au quadrant AE. Abaissez sur le rayon FD, les

perpendiculaires CM, HT; FM sera évidemment égal au sinus de l'arc AC; et FT = sin AH (car CM est bien le sinus de l'arc CD supplément de AC et HT le sinus de DH supplément de AH).

Des points M, T, pieds des perpendiculaires tirez sur le rayon FE les perpendiculaires MO, TS; le plan du cercle DE étant perpendiculaire au plan du cercle AE, coupera les plans des petits cercles à angles droits comme passant par le pôle.



La perpendiculaire CM, se trouve dans le plan du cercle AD, et fait des angles droits avec l'intersection DF, donc elle est perpendiculaire au plan du cercle DE. Cependant comme elle passe par la circonférence du petit cercle et que ce petit cercle est perpendiculaire à ce plan, elle se trouvera dans le plan du petit cercle CL.

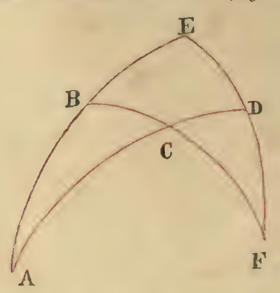
Menons la droite LM; cette droite représentera l'intersection du petit cercle CL et du cercle ED. Donc les plans CL et AE sont parallèles, et comme tous deux sont coupés par le cercle AD, les intersections EF, LM seront parallèles, et OM leur sera perpendiculaire et l'on aura sin EL égal et parallèle à OM. De la même manière on prouvera que TS est égal au sinus KE.

Maintenant je dis: EL, BC sont deux arcs de grand cercle passant par le pôle des deux parallèles; ils tombent (ils sont compris) entre deux cercles parallèles donc ils seront égaux, ainsi que cela est prouvé dans les Sphériques

(de Théodose); il en est de même de KE, HN. Par conséquent OM = sin BC et ST = sin HN, et du moment qu'on a $\frac{FM}{MO} = \frac{FT}{TS}$ on aura aussi $\frac{\sin AC}{\sin BC} = \frac{\sin AH}{\sin HN}$; c'est-à-dire que les rapports des sinus des arcs aux sinus de leurs inclinaisons sont égaux C. Q. F. D.

Voilà ce que les hommes de science ont enseigné sur cette matière.

Autre démonstration tirée de la figure du quadrilatère.



Dans le triangle ABC l'angle B = 1 D. Achevez les quadrants AD, AE et décrivez l'arc ED. Prolongez-le et prolongez l'arc BC jusqu'à leur rencontre en F. En vertu du rapport implicite on aura : $\frac{\sin FE}{\sin DE} = \frac{\sin FB}{\sin BC} \times \frac{\sin AC}{\sin AD}$. Mais FE, FB étant des quadrants (à cause des angles B, E qui sont droits), on aura $\frac{\sin AC}{\sin BC} = \frac{\sin AD = \text{sinus de l'angle droit}}{\sin DE = \text{sinus de l'angle A}}$ C. Q. F. D.

Autrement. $\frac{\sin CB}{\sin BF}$ (en vertu les règles du rapport implicite) $= \frac{\sin AC}{\sin AD} \times \frac{\sin DE}{\sin EF}$. Parmi ces six quantités nous avons trois quadrants, BF, AD, EF; dont les sinus seront tous egaux au rayon; lequel étant pris pour unité, comme Abou Rihan le prenait, on aura pour mesure du rapport composé $\frac{\sin CB}{\sin BF}$, le sinus de CB, lui-même; et de même on aura

pour mesure du rapport $\frac{\sin\ AC}{\sin\ AD}$, le sinus de AC, et enfin pour mesure du rapport $\frac{\sin\ DE}{\sin\ EF}$, le sinus de DE. Donc, $\sin\ CB = \sin\ AC \times \sin\ DE$, $\sin\ CB \times 1 = \sin\ CB$, et $\sin\ AC \times \sin DE = \sin\ CB \times 1$; $\frac{\sin\ AC}{\sin\ CB} = \frac{1}{\sin\ DE} = \frac{R = \sin 1\ D}{\sin \text{angle}\ A}$ C. Q. F. D.

Si nous remplaçons l'arc AC par un autre arc, il n'y aura évidemment rien à changer dans nos conclusions, d'où la conséquence: les rapports des sinus des arcs, aux sinus de leurs inclinaisons sont égaux aux rapports du sinus total c'est-à-dire du rayon au sinus de l'angle A.

Nous terminerons ici ce que nous avions à dire concernant les démonstrations de cette figure.

De l'application de la figure supplémentaire aux autres triangles.

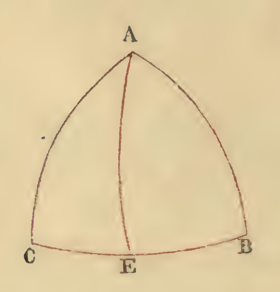
Pour les triangles acutangles et obtusangles la question qui se présente est celle-là même que nous avons signalée au début de ce chapitre; à savoir que: le rapport des sinus des côtés les uns à l'égard des autres est égal au rapport des sinus des angles opposés à ces côtés.

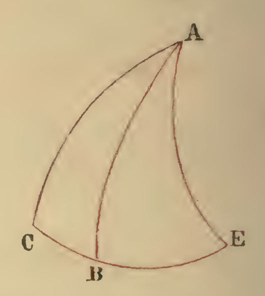
Soit le triangle ABC formé par des arcs de grands cercles, et qui n'a pas d'angle droit, je dis que:

$$\frac{\text{sinus arc } AB}{\text{sinus arc } AC} = \frac{\text{sinus angle } C \text{ opposé à arc } AB}{\text{sinus angle } B \text{ opposé à arc } AC}.$$

Démonstration. Décrivez un arc de grand cercle passant par le pôle de l'arc BC et par le point A, et soit le cercle BC coupé par cet arc en E à angles droits. Si les angles B, C, sont aigus, le point E, tombera dans le triangle; et

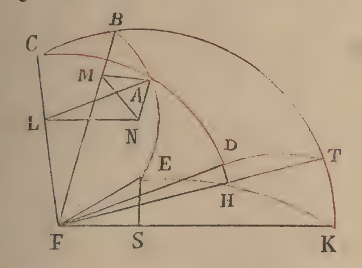
si l'un d'eux est obtus le point E tombera hors du triangle du côté de l'angle obtus. Supposez p. e. que dans l'une de ces deux figures l'angle B soit obtus; dans toutes les deux hypothèses on aura deux triangles rectangles, $\overset{\triangle}{ABE}$, $\overset{\triangle}{ACE}$; dans le premier desquels $\frac{1.\ \sin \text{arc } AB}{2.\ \sin \text{arc } AE} = \frac{3.\ \sin \text{de l'angle droit } E}{4.\ \sin \text{de l'angle } B}$: et dans le second $(\overset{\triangle}{ACE})$ $\frac{1.\ \sin \text{arc } AE}{2.\ \sin \text{arc } AC} = \frac{3.\ \text{sinus angle } C}{4.\ \text{sinus angle droit } E}$; d'où par la règle de *l'égalité troubleé* $\frac{\sin\ AB}{\sin\ AC} = \frac{\text{sinus } C}{\text{sinus } B}$. C. Q. F. D.

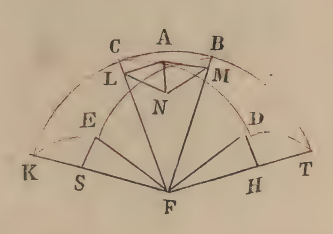




Autrement. Dans le 1er triangle $(\overset{\triangle}{ABE})$ nous avons quatre quantités qui sont en proportion; nous en avons également quatre dans le second $(\overset{\triangle}{ACE})$; or la 2de et la 3ème des 4, 1ères sont égales à la 1ère et la 4ème des 4. 2ème; et dès lors aussi le produit de la 2ème et de la 3ème des 4. 1ères; sera égal à celui de la 1ère et de la 4ème des 4. 2èmes. Il en résulte que le produit de la 1ère et de la 4ème des 4. 1ères doit être égal au produit de la 2ème et de la 3ème des quatre secondes; c'est-à-dire que le rapport de la 1ère des quatre premières (sinus AB) à la 2de des quatre deuxièmes (sinus AC), doit

être égal au rapport de la 3ème des quatre deuxièmes (sinus angle C) à la 4ème des quatre premières; (sinus angle B) C. Q. F. D.



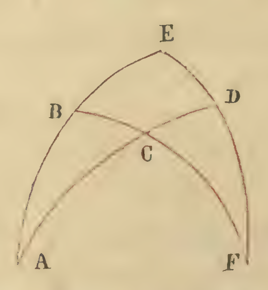


Autre démonstration de l'Emir Abou Nasr. Prenons deux triangles ABC dans l'un desquels tous les angles soient aigus, tandis que dans l'autre l'angle B est obtus. — Prolongeons les côtés BC de manière à avoir deux arcs BK, BE, égaux chacun à un quadrant — Faisons de même pour les arcs CD, CT et joignons les arcs (de grands cercles) TD, KE; ces arcs mesureront les angles C, B, s'ils sont aigus, ou bien l'angle C aigu et le supplément de B obtus. — Dans les deux cas leurs sinus, seront les sinus des angles C, B. — Menons les rayons FB, FC, FK, FD, FT, FE, chacun de ces rayons sera évidemment l'intersection de deux cercles. Du point A abaissons trois perpendiculaires, l'une AM dans le plan du cercle BA (sur le rayon-intersection BF;) qui sera parallèle à EF; la seconde AL, (dans le plan du cercle AC, sur le rayon-intersection CF) parallèle à DF; — et la 3ème AN, dans le plan du cercle TBC; joignons NL, NM, ces deux lignes seront perpendiculaires à l'intersection, ainsi que cela a été établi dans l'introduction. — Abaissons encore la perpendiculaire DH sur le rayon-intersection FT; elle se trouvera dans le cercle DT. L'arc TBC passant par C, pôle de l'arc DT, le plan de ce dernier cercle sera perpendiculaire sur le plan du cercle TBC. De même nous abaissons ES perpendiculaire sur KF; ES sera évidemment perpendiculaire sur le plan TBC aussi. Ceci posé, on voit

que les triangles ANL, DHF, (à cause du parallélisme des côtés AL, DF; AN et DH; NL et HF) sont semblables; et aussi que les triangles ANM, ESF sont semblables. On aura donc $\frac{AM}{AN}$ (du triangle ANM) $= \frac{FE = R}{ES}$ (du triangle ESF); et aussi $\frac{AN}{AL}$ (du triangle ANL) $= \frac{DH}{DF = R}$ (du triangle DHF); mais R étant égal à 1, par *l'égalité troublée* on aura $\frac{AM}{AL} = \frac{DH}{ES}$. Or $AM = \sin AB$; $AL = \sin AC$; $DH = \sin DT = \sin$ de l'angle C; $ES = \sin EK =$ sinus de l'angle B: d'où $\frac{\sin AB}{\sin AC} = \frac{\sin C}{\sin B}$. C. Q. F. D.

Conséquences et accessoires de la figure supplémentaire.

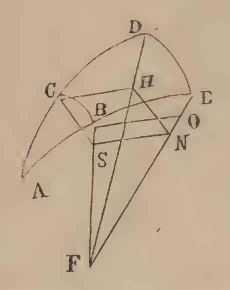
1ère Conséquence. Dans tout triangle d'arcs de grands cercles qui a un angle droit $\frac{\text{cos. de l'un des côtés de l'angle droit}}{\text{cos. du côté opposé à l'angle droit}} = \frac{\text{sinus de l'angle droit}}{\text{cos. du 3}^{\text{ème}}\text{ côté}}$. Soit le triangle ABC rectangle en B, je dis que: $\frac{\cos BC}{\cos AC} = \frac{\text{sin de tout le quadrant}}{\cos AB}$.



Démonstration. Prolongez AC, AB, de manière à former les quadrants AD, AE; et ED, BC, jusqu'à leur rencontre en F, qui sera le pôle de AE; le quadrilatère AEFC, aura

ainsi pour côtés des quadrants et ses angles D, E, B, seront droits; et dès lors aussi d'après ce qui a été établi dans la figure supplémentaire $\frac{\sin\ FC}{\sin\ DC} = \frac{\sin\ FB}{\sin\ BE}$. Mais FC, CD, BE sont les compléments des arcs CB, AC, AB; sinus FB est le plus grand sinus, donc $\frac{\cos BC}{\cos AC} = \frac{\text{sin. d'un quadrant}}{\cos\ AB}$

C. Q. F. D.



Autrement. Aboul-Fazl Ennizizy et Abou Djafer Alhazin dans leurs commentaires de l'Almageste ont fait usage de la figure qui donne lieu à cette démonstration, à l'occasion de l'enseignement des lieux d'apparitions des étoiles [1] Reprenons la figure que nous avons empruntée précédemment à ces mêmes auteurs en traitant de la figure supplémentaire. Nous y avions démontré que CSHN était un rectangle et que CH était perpendiculaire au plan du cercle DE; que SN parallèle à CH était perpendiculaire au plan du cercle DE, que le triangle FSN était rectangle en N. Tirez BO perpendiculaire à EF, dans le plan du cercle AB, SN aussi se trouve dans ce même plan et les triangles FBO, FSN seront semblables, d'où

$$\frac{FS = \cos\ BC}{SN = CH = \cos\ AC} = \frac{FB = R = \text{sinus maximus}}{BO = \cos\ AB}.$$ C. Q. F. D.

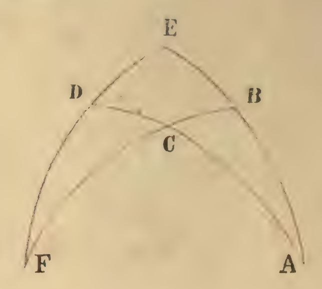
2ème conséquence. Dans tout triangle formé par des arcs

---

(1) لمعرفة المطالع

de grands cercles et qui a un angle droit : $\frac{\text{cosinus d'un angle autre que l'angle droit}}{\text{cosinus de l'arc opposé à cet angle}} = \frac{\text{sinus de l'autre angle non droit}}{\text{sinus de l'angle droit}}$.

Soit dans le triangle ABC l'angle BC droit, je dis que $\frac{\cos. A}{\cos. BC} = \frac{\text{sinus } C}{\text{sinus } B = 1}$.



Démonstration. Complétons le quadrilatère EAFC au moyen de quadrants. Dans le triangle CDF, l'angle D sera droit, et d'après les principes de la figure supplémentaire $\frac{\sin DF}{\sin FC} = \frac{\sin C}{\sin D = 1}$.

Mais DF = compl. DE qui mesure l'angle A ; FC = compl. CB, côté opposé à A, d'où, dans le triangle ABC $= \frac{\cos. A}{\cos. BC} = \frac{\text{sinus } C}{1}$. C. Q. F. D.

C'est sur ces deux conséquences, ou corollaires que sont fondées la plupart des questions qu'on présente comme des conséquences de la figure supplémentaire.

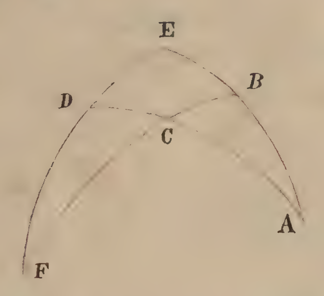
D'après l'Emir Abou Nasr :

Dans tout triangle rectangle, [1] chaque angle non droit mesure le complément de l'inclinaison du complément de son arc, l'inclinaison étant prise sur celle dont la plus grande mesure l'autre angle non droit de ce même triangle ;

---

(1) Formé d'arcs de grands cercles.

et réciproquement, son arc, (c'est-à-dire l'arc opposé à un angle non droit) est le complément de l'arc dont le complément d'inclinaison est la mesure de l'angle opposé à cet arc, en prenant l'inclinaison sur celle que nous avons qualifiée de plus grande. Ainsi la mesure de l'angle A dans le triangle ABC du quadrilatère dont nous venons de tracer la figure est ED égal au complément de DF qui constitue l'inclinaison de l'arc CF (l'inclinaison étant prise sur celle dont la plus grande mesurera l'angle C), lequel arc CF est le complément de BC; et voilà comment ED est le complément de l'inclinaison du complément de BC eu égard à l'inclinaison que nous avons considérée. De même le côté BC est égal au complément de CF dont l'arc d'inclinaison par rapport à l'angle C est l'arc FD qui est égal au complément de l'angle A.



Cette observatien établit la similitude existant quant au rapport de l'angle et de l'arc. Dans la pratique cependant cela revient au 2ème corollaire ci-dessus.

Ainsi encore, $\frac{\text{sinus du complément de l'angle non droit}}{\text{sin. du complément de l'arc opposé à cet angle}}$ est égal à $\frac{\text{sinus du complément de l'autre angle non droit}}{\text{sinus de l'arc opposé à l'angle droit}}$.

c'est-à-dire $\frac{\cos A}{\cos BC} = \frac{\sin BA \text{ opposé à } C}{\sin AC \text{ opposé à l'angle droit}}$ et cela par la raison que $\frac{\sin DF}{\sin FC} = \frac{\sin BA}{\sin AC}$, ainsi que cela a été

démontré par la figure supplémentaire. Ce corollaire n'est pas d'une grande utilité dans la recherche des inconnues, car on ne parvient ainsi à la connaissance de l'inconnue qu'au moyen de trois connues autres que l'angle droit, tandis que par la figure supplémentaire et ses deux corollaires on n'a besoin que de deux données. On rattache encore à cette figure d'autres corollaires que ceux dont nous venons de parler; mais ce que nous en avons dit suffit pour le but que nous nous proposons ici. (1)

Abou Mahmoud Alhodjeudy a donné à cette figure (la figure supplémentaire) la dénomination de «*Règle de l'astronomie.*» (2) D'autres l'ont appelée *la figure qui dispense du quadrilatère.* (3) Dans son livre intitulé «*Les clefs de la connaissance de ce qui se produit sur la surface de la sphère.*» (4) Abou Rihan affirme que c'est bien l'Emir Abou Nasr qui a le premier fait usage de la figure supplémentaire en lieu et place du quadrilatère, mais que le nom qu'elle porte lui vient d'Elkia Kouschyar Ben Lebban Eldjébely(?) (5) Cependant cette assertion se heurte contre une difficulté, car l'Emir Abou Nasr, dans la seconde partie du Livre I^er^ de l'ouvrage intitulé «L'Almageste Royal» (6) au début du Chapitre III, dans lequel il est parlé de cette figure, écrit textuellement; «Chapitre III^ème^ de ce qui peut dispenser

---

(1) **Voici le texte du commencement de ce paragraphe** قال الاميرابو نصر كل زاوية غيرالقايمة فى مثلث قائم الزاوية الكائن من القسى العظام يكون يقدر تمام ميل تمام وترهامن الميل الذى يكون اعظمه يقدر الزاوية الاخرى غيرالقائمة من ذلك المثلث وبالعكس يكون وترها تمام قوس يكون تمام ميلها هو قدر الراوية الموترة بهذاالوتر والميل الذى من وصفنا اعظمه

(2) قانون الهيئة

(3) المفى

(4) مقاليد العلم مايحدث فى بسيط الكرة

(5) كااي كوشيادبن لبان الحلى

Le défaut de points diacritiques ne permet pas la lecture assurée du dernier surnom de ce géomètre.

(6) المجسطى الشاهى

de la figure du quadrilatère»; et là après qu'il a mentionné le traité (Rissalet) de Thabit-Ben-Korrah sur les différentes variétés qui surviennent dans la figure du quadrilatère il ajoute. «et Thabit-Ben-Korrah a également composé un traité sur «ce qui peut dispenser de la figure du quadrilatère, mais «celui qui y a recours doit connaître l'usage des rapports «composés; or je vais montrer ici-même un procédé qui «dispense aussi bien de la figure du quadrilatère que des «rapports composés». Ces paroles prouvent bien que le terme même de figure supplémentaire est dû à l'Emir-Abou-Nasr qui le tenait de Thabit-Ben-Korrah. [1]

CHAPITRE VI.

De la figure dite ombrée, de ses conséquences et de ses accessoires.

La priorité en ce qui concerne cette figure revient incontestablement à Aboul-Véfa Elbouzdjany ainsi que cela est constaté par Abou.Rihan.

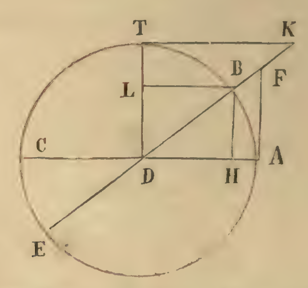
La proposition à démontrer porte sur le triangle rectangle formé par des arcs de grands cercles dans lequel

$$\frac{\text{sinus de l'un des côtés de l'angle droit}}{\text{sinus de l'angle droit}} = \frac{\text{ombre de l'autre côté de l'angle droit}}{\text{ombre de l'angle opposé à ce côté}}.$$

Mais avant d'en entreprendre la démonstration, il convient de dire que par *ombre* d'un arc on entend ici la par-

(1) Une note en marge du manuscrit porte. «J'ajoute : Que l'Emir Abou Nasr en a parlé «dans son commentaire sur Ménélas, ainsi que je l'ai rapporté à l'occasion de la figure supplé-«mentaire». — Cette note semble se rapporter à ce qui est dit au commencement de ce chapitre; dans ce cas elle serait due à la plume de l'auteur et non à celle du copiste ou de quelque autre personne qui aurait aussi écrit sur le même sujet.

tie interceptée, par les diamètres menés aux extrémités de cet arc, sur la perpendiculaire élevée à l'une de ses extrémités sur le diamètre qui passe par cette extrémité; cette perpendiculaire sera d'ailleurs parallèle au sinus de cet arc, le sinus étant lui aussi nécessairement perpendiculaire sur ce diamètre.



Soit le cercle ABCE (centre D) et l'arc AB. Menez les diamètres passant par les points A, B, et du point A élevez sur AC, la perpendiculaire AF, qui rencontrera le diamètre BE en F; AF est *l'ombre* de l'arc AB, parallèle à BH qui en est le sinus. De même élevez sur AC, la perpendiculaire DT au centre. La perpendiculaire TK sera l'ombre de l'arc TB, pendant que BL en est le sinus; en d'autres termes TK et BL seront l'ombre et le sinus du complément de l'arc AB. Ce que nous avons appelé ombre, les astronomes l'appellent *ombre première et ombre renversée* de l'arc AB, qui sert de norme à l'ombre de l'arc, *d'élévation* ou *d'ascension;* ils appellent TK, *l'ombre seconde* de l'arc AB, ou *l'ombre droite;* FD est pour eux *le diamètre de la 1ère ombre,* et KD, *le diamètre de la seconde ombre;* et ils se servent du diamètre pour mesurer la 1ère ombre, de la même manière dont ils se prennent pour les sinus et les cordes. Parfois ils divisent la seconde ombre en douze parties qu'ils appellent *doigts*, ou bien en neuf ou six; ils donnent à la moitié le nom de pieds. L'ombre 1ère de tout arc est l'ombre 2de de son complément et vice-versa; le rapport de l'ombre au rayon est égal au rapport du sinus de l'arc au sinus

de son complément (cosinus); le rapport de l'ombre au diamètre de l'ombre (FD) est égal au rapport du sinus au rayon, à cause de la similitude des triangles FAD, BHD; mais les triangles AFD, KTD aussi étant semblables on a $\frac{FA}{AD} = \frac{TD = AD}{KD}$; donc le rayon est moyen proportionnel entre l'ombre de l'arc et l'ombre de son complément, et les ombres de deux arcs sont comme les inverses des ombres de leurs compléments. De même le rapport de l'ombre de tout arc à l'ombre du complément d'un autre arc, est égal au rapport de l'ombre de cet autre arc à l'ombre du complément du premier arc.

Maintenant lorsqu'un nombre est multiplié par un autre nombre et divisé par un troisième nombre, et que l'unité est moyenne proportionnelle entre le multiplicateur et le diviseur, le produit de la division et le quotient de la division donnent le même résultat; par la raison que, le rapport de l'unité au multiplicateur = le rapport du multiplicande au produit, que le rapport de l'unité au diviseur = le rapport du quotient au dividende, et que, inversement le rapport du diviseur à l'unité est égal au rapport du dividende au quotient. Dès lors, puisque dans l'hypothèse en question, le rapport du diviseur à l'unité est le rapport même de l'unité au multiplicateur, le rapport du dividende au quotient sera égal au rapport du multiplicande au produit, et réciproquement le rapport du dividende au multiplicande est égal au rapport du quotient au produit de la multiplication; mais dans notre hypothèse, le multiplicande et le dividende étant les mêmes, le produit de la multiplication et le quotient de la division seront aussi les mêmes. Ceci posé, si nous faisons du rayon une unité, d'après le procédé d'Abou Rihan, il devient clair que le produit d'un nombre par l'ombre d'un arc, devra être égal à la division de ce nombre par l'ombre de l'arc complémentaire.

De même si l'unité est moyenne proportionnelle entre deux nombres, que le premier de ces nombres soit multiplié par un 3ème nombre et que le 2nd soit divisé par ce même nombre, l'unité sera encore moyenne proportionnelle entre ce produit et ce quotient. En effet $\frac{1^{er}\text{ nombre}}{1} = \frac{1}{2^{ème}\text{ nom.}}$ $\frac{1}{3^{ème}\text{ nom.} = \text{multiplicateur}} = \frac{\text{le } 1^{er}\text{ nom.} = \text{multiplicande.}}{\text{produit}}$ et $\frac{1}{3^{ème}\text{ nombre} = \text{diviseur}} = \frac{\text{quotient}}{\text{dividende} = 2^{ème}\text{ nombre}}$. Mais le rectangle multiplicande $\times$ dividende $= 1^2 =$ le rectangle produit $\times$ quotient $= 1^2$. Donc produit : 1 : : 1 : quotient. D'où la conséquence : si l'ombre d'un arc est multipliée par un nombre, et si l'ombre de l'arc complémentaire est divisée par ce même nombre, le rayon sera moyenne proportionnelle entre ces deux résultats, les deux arcs pris ensemble formant un quadrant.

De même si l'unité est moyenne proportionnelle entre A et B, et aussi entre C, et E, elle sera également moyenne proportionnelle entre $A \times C = D$ et $B \times E = F$; car $\frac{1}{C = \text{multiplicateur}} = \frac{A = \text{multiplicande}}{D = \text{produit}}$; $\frac{C}{1} = \frac{D}{A}$; $\frac{1}{E} = \frac{B}{F}$; mais par hypothèse $\frac{C}{1} = \frac{1}{E}$, donc $\frac{D}{A} = \frac{B}{F}$, d'où $D_*F\ A_*B$. Mais $\frac{A}{1} = \frac{1}{B}$ donc aussi D : 1 : : 1 F.

Dans la même hypothèse, si $\frac{A}{C} = D$; $\frac{B}{E} = F$, l'unité sera moyenne proportionnelle entre D et F. En effet $\frac{1}{C = \text{diviseur}} = \frac{D = \text{quotient}}{A = \text{dividende}}$ et $\frac{C}{1} = \frac{A}{D}$; $\frac{1}{E = \text{multiplicateur}} = \frac{F}{B}$. Donc $\frac{A}{D} = \frac{F}{B}$, $A \times B = D \times F$ et comme A : 1 : : 1 : B on devra avoir

aussi D : I : : I : F. D'où il résulte que lorsqué nous multiplions l'ombre d'un arc par l'ombre d'un autre arc, ainsi que les ombres de leurs arcs complémentaires l'un par l'autre, les produits des deux multiplications seront les ombres de deux arcs dont l'un sera le complément de l'autre et que d'un autre côté, lorsque nous divisons l'ombre d'un arc par l'ombre d'un autre arc, et que nous faisons la même chose pour leurs compléments les deux quotients sont les ombres de deux arcs complémentaires. [1]

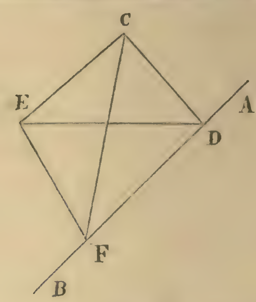
Enfin si (A et B étant deux nombres) $\frac{A}{B} = C$ et $\frac{B}{A} = E$, l'unité sera moyenne proportionnelle entre C et E car $\frac{I}{B} = \frac{C}{A}$; $\frac{A}{B} = \frac{C}{I}$; $\frac{B}{A} = \frac{E}{I}$; $\frac{I}{E} = \frac{A}{B}$ donc $\frac{C}{I} = \frac{I}{E}$ ou bien C : I : : I : E. La conséquence en est que lorsque par la division de deux nombres on obtient l'ombre d'un arc, la division inverse doit donner l'ombre du complément de cet arc.

On peut arriver à une foule de conséquences de ce genre en étudiant les propriétés des ombres dont la connaissance se prête à un grand nombre de développements sur ce sujet. Mais revenons à ce qui fait l'objet principal de notre recherche, et établissons la plupart des théorèmes de cette figure d'une manière analogue à celle que nous avons suivie pour la figure supplémentaire, en commençant par une introduction pareille à celle dont Abou Nasr a fait précéder ses développements.

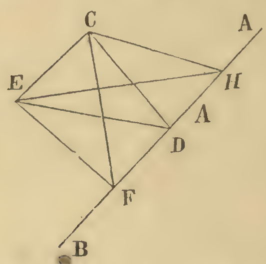
Proposition préliminaire. Si deux plans se coupent à angle obtus ou aigu et si prenant un point sur l'un de ces plans, sur ce point nous élevons une perpendiculaire à ce même plan, et de ce point nous menons une perpendiculaire sur la ligne d'intersection, la droite qui joint le pied

---

(1) Si tga $\times$ tgb $=$ tgx on aura cota $\times$ cotb $=$ cotx $=$ tg $(90 - x)$; de même si $\frac{tga}{tgb} =$ tgx alors $\frac{cota}{cotb} =$ cotx $=$ tg $(90 - x)$.



de la 1ère perpendiculaire dans le second plan au pied de la perpendiculaire à la ligne d'intersection, sera également perpendiculaire à la ligne d'intersection. Soit AB l'intersection des deux plans, C, le point en question dans le 1er plan, CE la perpendiculaire élevée sur ce plan et coupant l'autre plan au point E; CD la perpendiculaire de C sur AB; joignez ED, je dis que DE sera perpendiculaire sur AB.

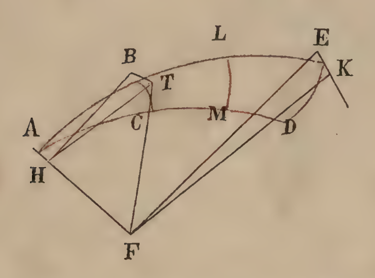


Démonstration. Prenez sur AB, un autre point, le point F, p. e. menez CE, EF; $\triangle ECF$ sera droit; donc $\overline{EF}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{CF}^2$. Mais $\overline{CF}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DF}^2$; donc $\overline{EF}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DF}^2$. Mais $\overline{ED}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{CD}^2$; donc $\overline{EF}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DF}^2$ ce qui prouve que $\widehat{EDF} =$ 1 D. C. Q. F. D. *Autre démonstration.* Prenez DH = DF, menez CH, EH; dans les triangles CHD, CDF, DH = DF, CD est commun, les angles D sont droits, doncaussi CH = CF; et par conséquent $\triangle ECF = \triangle ECH$, d'où EH = EF. Donc enfin $\triangle EDH = \triangle EDF$, $\widehat{EDH} = \widehat{EDF}$, C. Q. F. D.

De la figure ombrée. (1)

Dans le triangle ABC formé d'arcs de grands cercles, soit l'angle B = 1 D; l'angle A = un angle aigu je dis que

$$\frac{\text{sinus AB}}{\text{au sinus de son tout} = \text{angle B}} = \frac{\text{tg BC}}{\text{tg A}}.$$

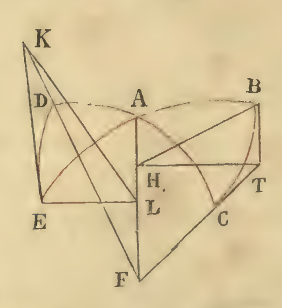


Démonstration. Prolongez les arcs AB, AC, jusqu'à ce que vous ayez AE, AD égaux à deux quadrants et faites passer par ces deux points l'arc de grand cercle DE qui mesurera l'angle A. Des points B, E, élevez BT, EK, perpendiculaires au plan du cercle ABE qui iront se terminer au plan du cercle ACD, aux points K et T et rencontreront ainsi le plan du cercle ACD aux points T, K. Ces deux perpendiculaires se trouveront nécessairement dans les plans des cercles BC, DE chacune dans le plan de son cercle, par la raison que ces deux cercles font des angles droits avec le plan du cercle ABE, et que les perpendiculaires sont élevées sur les points d'intersection. Du centre F menez FD, FC que vous prolongerez jusqu'à T et K. Tirez de même le rayon FA, qui constitue la ligne d'intersection des deux cercles AE, AD, et BH perpendiculaire à ce rayon. Menez encore FE qui sera perpendiculaire à AF, puisque AE est un quadrant. Enfin menez TH; les triangles TBH,

(1) Nous avons conservé ici encore l'adjectif *ombrée;* mais comme il a été suffisamment constaté que ce que notre auteur appelle *ombre* est tout simplement la *tangente,* pour plus de clarté nous ne nous servirons dorénavant que de cette dernière dénomination.

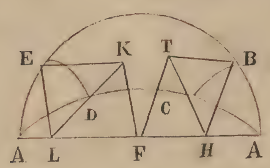
KEF seront semblables; (en effet, BH, EF, qui se trouvent dans le plan du cercle ABE sont parallèles, comme perpendiculaires à la même ligne AF; BT, EK, sont également parallèles comme perpendiculaires au même plan, le plan du cercle ABE; TH, KF sont aussi parallèles en vertu du principe que nous avons posé dans l'introduction;) Nous aurions pu aussi commencer par mener des points T, K les lignes TH, KF, perpendiculaires sur AF dans le plan du cercle ACD et joindre ensuite BH, EF parallèles à ces lignes, en vertu du principe développé dans l'introdution de la figure supplémentaire, de manière que ce principe fût suffisant pour les deux figures. En tout cas, le parallélisme des côtés des deux triangles semblables TBH, KEF, constaté on aura $\frac{\text{BH (sinus AB)}}{\text{EF } (= \text{R} = \text{sinus de l'angle droit B})} =$ $\frac{\text{BT (tg BC)}}{\text{EK (tg ED} = \text{tg angle A)}}$. C. Q. F. D.

Il en résulte que si nous supposons un autre arc, p. e. l'arc LM, perpendiculaire au cercle AE on aura encore $\frac{\sin \text{AL}}{\sin \text{AE}} = \frac{\text{tg LM}}{\text{tg ED}}$ et $\frac{\sin \text{AB}}{\sin \text{AL}} = \frac{\text{tg BC}}{\text{tg LM}}$; de sorte que les si-

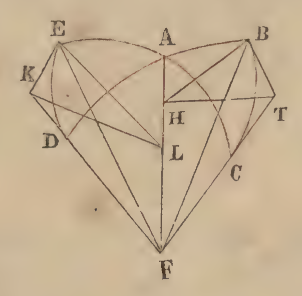


nus des arcs sont entre eux comme les tagentes de leurs largeurs entre elles et par conséquent aussi le sinus de tout arc est à la tangente de sa largeur, comme le *sinus maximus* à la tangente de l'angle A; si bien que dans deux triangles qui ont un angle droit et un angle aigu égal,

(lors même que les triangles ne seraient pas superposables l'un à l'autre, comme cela est le cas dans les triangles ABC, AED des deux figures ci-contre, où les deux angles aigus A sont égaux, pendant que les deux angles B et E sont droits) les choses se passent comme nous venons de le dire, ainsi qu'on peut le démontrer comme nous l'avons fait plus haut.



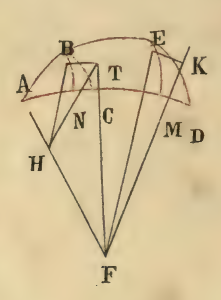
Les techniciens se sont en général bornés à la démonstration précédente; néanmoins j'ai cru devoir ajouter quelques autres démonstrations de ces mêmes principes, par analogie de ce qui a été déjà fait pour la figure supplémentaire afin que, Dieu aidant, la discussion soit rendue de tout point proportionnée dans ses parties.



Autre procédé. Dans les deux triangles formés d'arcs de grands cercles ABC, AED, soient les angles A égaux comme opposés par le sommet, les angles B, E droits. Du centre F, menez les rayons FC, FB, FA, FE, FD. Des points B, E, abaissez sur AF, ligne d'intersection des deux plans, les perpendiculaires BH, EL, et de ces mêmes points élevez sur le plan du cercle AB la perpendiculaire BT, et sur celui du cercle AC la perpendiculaire EK qui rencontre-

ront les rayons FC, FD prolongés, en T et en K. Joignez TH, KL. Les lignes BH, TF étant dans le plan du cercle AC, [1] TH aussi y sera, perpendiculaire à AF, d'après le principe posé dans l'introduction; EL aussi sera dans ce même plan perpendiculaire à AF, d'où il résulte que TH et EL sont parallèles; de la même manière on prouvera que BH et KL, perpendiculaires à AF et qui se trouvent dans le plan du cercle BA sont également parallèles; de là $\widehat{BHT} = \widehat{ELK}$, d'un autre côté $\hat{B}$ et $\hat{E}$ sont droits, donc les triangles BHT, EKL sont semblables, d'ou $\frac{BH = \text{sinus } AB}{LE = \text{sinus } AE} = \frac{BT = \text{tg } BC}{EK = \text{tg } ED}$. C. Q. F. D.

Si les triangles étaient superposables, la démonstration serait fournie d'une manière analogue.

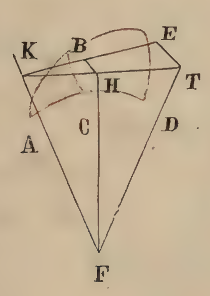


Autre démonstration. Soient les deux triangles ABC, AED, formés d'arcs de grands cercles. Ils ont l'angle A commun, les angles B, E droits; F est le centre; FA, FC, FD sont des rayons. Du paint A, comme pôle, nous faisons passer par les points B, E deux arcs de petits cercles BN, EM; nous abaissons ensuite sur AF, les perpendiculaires BH, EL, qui seront les rayons des deux petits cercles, ainsi que nous l'avons établi plus haut; aux points B, E également

---

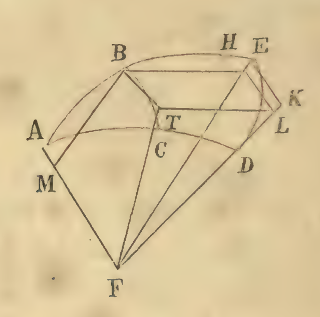
(1) BH n'est pas dans le plan du cercle AC, c'est le point H qui s'y trouve, comme aussi le point T et par conséquent la droite TH.

nous élevons BT, EK perpendiculaires au plan du cercle AE, ce seront les lignes d'intersections des plans des petits cercles et de ceux des grands cercles BC, ED, par la raison que les petits cercles aussi bien que les grands cercles BC, ED sont perpendiculaires au plan du cercle AE, que leur section sera par conséquent une ligne perpendiculaire à ce même plan, et que des points B et E on ne peut élever plus d'une perpendiculaire sur ce plan, se terminant au plan BC aux points T, K. Maintenant les points T, N, H, se trouvant à la fois dans le plan du petit cercle BN et dans celui du grand cercle ACD, seront situés sur leur intersection commune: sur la droite TH; de même les points K, M, L, seront situés sur la droite KL; et à cause de la similitude des arcs BN, EM, situés entre les arcs de grands cercles AE, AD passant par le pôle A, et de l'égalité des rapports des tangentes des arcs semblables de différents cercles à leurs rayons on aura $\frac{BH = \text{sinus } AB}{BT = \text{tg } BC} = \frac{EL = \text{sinus } AE}{EK = \text{tg } ED}$, c'est-à-dire que le rapport du sinus d'un arc à la tangente de sa largeur, est égal au rapport du sinus d'un autre arc à la tangente de sa largeur; et, si AE, AD sont des quadrants, au rapport du sinus entier, (le rayon) à la tangente de l'angle A.



Autre démonstration. Soient les triangles ABC, AED, conformes à la définition; BH, ET, perpendiculaires au plan ABE; prolongeons les rayons FC, FD jusqu'à leur rencontre

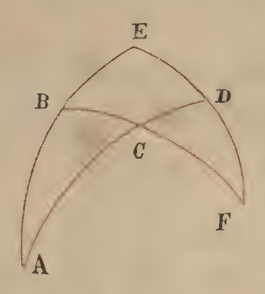
avec les perpendiculaires aux points T, H; et la corde BE, jusqu'à sa rencontre avec le rayon FA au point K. Les points K, H, T, étant situés dans le plan des perpendiculaires BA, ET, qui sont parallèles et aussi dans le plan AD, se trouveront sur la droite-intersection THK, et les deux triangles KBH, KET seront semblables, comme ayant l'angle K commun, et les angles B, E, droits. Mais $\frac{\text{KB}}{\text{KE}} = \frac{\text{sinus AB}}{\text{sinus AE}} = \frac{\text{BH}}{\text{ET}} = \frac{\text{tg BC}}{\text{tg ED}}$, donc le rapport des sinus des arcs les uns envers les autres est égal au rapport des tangentes de leurs largeurs. Et (si AD, AE = quadrant) au rapport de la tangente de la largeur à la tangente de l'angle A. C. Q. F. D.



Autre démonstration. Reprenons le triangle ABC, prolongeons les arcs AB, AC, jusqu'à parfaire les quadrants AD, AE; traçons l'arc DE, et menons les rayons FA, FC, FD, FE; élevons BT, EK perpendiculaires au plan AE, et prolongeons FC, FD, jusqu'à leur rencontre avec ces perpendiculaires aux points T, K; abaissons BH perpendiculaire sur le rayon intersection FE, dans le plan du cercle AB; BH sera perpendiculaire au plan DE; menons de même TL perpendiculaire sur le rayon intersection FD, dans le plan du cercle AD; TL sera aussi perpendiculaire au plan du cercle ED. Joignons HL. Maintenant TL, BH seront parallèles

comme perpendiculaires au même plan, les angles BHL, TLH seront droits, mais l'angle HBT aussi est droit; donc BTHL est un rectangle et HL étant parallèle à BT qui est parallèle à EK, on aura HL, parallèle à EK, et les triangles FHL, FEK, semblables.

d'où $\frac{FH = \text{sinus du complément de } BE = \text{sinus } AB}{HL = BT = \text{tg } BC} = \frac{FE = \text{sinus maximus}}{EK = \text{tg } A}$. Nous pouvions aussi mener BM perpendiculaire à FA et prouver que la figure BHFM est un rectangle pour en conclure que HF = MB etc. C. Q. F. D.



Autre démonstrâtion. Tirée du quadrilatère.

Triangle ABC. $\hat{B}$ = 1. D. AD, AE sont des quadrants: EF, BF le seront aussi. En vertu du principe du quadrilatère $\frac{\sin BC}{\sin CF \text{ son complément}} = \frac{\sin BA}{\sin AE} \times \frac{\sin ED}{\sin DF \text{ son compl.}}$

Mais $\frac{\text{sinus d'un arc}}{\text{sinus de son complément} = \text{cosinus de l'arc}} = \frac{\text{tg de l'arc}}{R}$

donc $\frac{\text{tg } BC}{R} = \frac{\sin AB}{R} \times \frac{\text{tg } ED}{R}$, d'où supprimant le 2^{nd} et le $6^{ème}$ terme comme égaux on a $\frac{\text{tg } BC}{\sin AB} = \frac{\text{tg } ED}{R}$.

Autrement. Si, avec Abou Rihan, nous supposons le rayon égal à l'unité, $\frac{\text{tg } BC}{R} = \text{tg } BC = \sin AB \times \text{tg } ED$ ou

bien $\text{tg BC} \times 1 = \sin \text{AB} \times \text{tg ED}$; soit $\frac{\sin \text{AB}}{1 = \text{R}} = \frac{\text{tg BC}}{\text{tg ED} = \text{tg angle A}}$. Il en serait de même si, au lieu de BC, il s'agissait d'un autre arc; ce qui prouve que les sinus des arcs sont entre eux comme les tangentes de leurs largeurs entre elles. C. Q. F. D.

Par là on voit aussi que cette figure (la figure ombrée) se rattache au rapport explicite de Ptolémée, de la même manière dont la figure supplémentaire se rattache à ce même rapport.

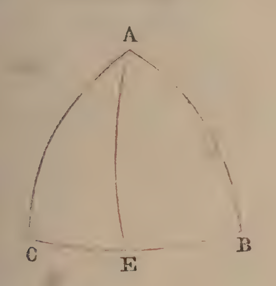
De l'application des principes de cette figure aux autres triangles.

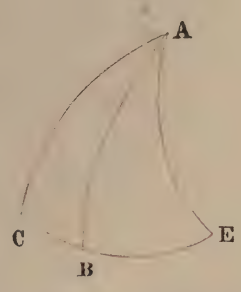
Sachez que les principes que nous venons de tirer de figure dérivent de propriétés qui sont en quelque sorte spéciales à l'angle droit. Ce qui n'est pas le cas pour la figure supplémentaire. Il s'ensuit qu'on ne peut en faire l'application aux triangles acutangles ou obtusangles en faisant abstraction de l'angle droit. C'est là un point qui différencie cette figure de la figure supplémentaire, et qui donne à cette dernière un élément de supériorité, bien que ces deux figures soient pour ainsi deux jumelles que le même sein a nourries.

Si nous voulons étendre cette figure aux triangles dont nous venons de parler, nous décrivons un arc de grand cercle passant par un de leurs angles et qui fasse un angle droit avec le cercle dans lequel se trouve le côté opposé à cet angle.

Soit p. e. le triangle ABC, qui a les angles A, C, aigus et l'angle B aigu ou obtus. Faites passer par A l'arc AE

qui coupe la base BC au point E, à angles droits, je dis que $\frac{\text{tg B}}{\text{tg C}} = \frac{\text{sinus CE}}{\text{sinus BE}}$.





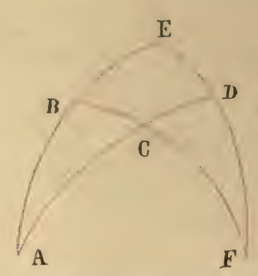
En effet dans le triangle rectangle ABE, $\frac{\text{tg B}}{\text{tg AE}} = \frac{\text{sin maxim.}}{\text{sinus BE}}$ et dans le triangle AEC, également rectangle en E, $\frac{\text{tg AE}}{\text{tg C}} = \frac{\text{sin EC}}{\text{sinus maximus}}$. D'où en vertu de l'égalité troublée $\frac{\text{tg B}}{\text{tg C}} = \frac{\text{sinus CE}}{\text{sinus BE}}$. C. Q. F. D.

De même $\frac{\text{tg } \widehat{\text{BAE}}}{\text{tg BE}} = \frac{\text{tg } \widehat{\text{CAE}}}{\text{tg CE}}$; parce que chacun de ces deux rapports est égal à $\frac{\text{sinus maximus}}{\text{sinus AE}}$, d'où en échangeant les termes $\frac{\text{tg } \widehat{\text{BAE}}}{\text{tg } \widehat{\text{CAE}}} = \frac{\text{tg BE}}{\text{tg CE}}$.

Corollaires et conséquences de la figure ombrée.

1^er^ Corollaire. Dans tout triangle rectangle, le cosinus de l'angle aigu que nous lui supposons est au sinus de l'angle droit, comme la tangente du complément de l'arc opposé à l'angle droit est à la tangente du complément du côté

qui se trouve entre l'angle droit et l'angle A que nous avons supposé aigu, ou bien comme la tangente du côté qui se trouve entre les deux angles est à la tangente du côté opposé à l'angle droit.



Soit le triangle ABC rectangle en B et acutangle en A je dis que $\frac{\text{cosinus de l'angle A}}{\text{sinus maximus} = \text{sinus B}} = \frac{\cot AC}{\cot AB}$.

Démonstration. Complétez le quadrilatère AEFC, de manière que les côtés en soient des quadrants et vous aurez en vertu du principe de la figure ombrée $\frac{\text{sinus FD}}{\text{sinus FE}} = \frac{\text{tg DC}}{\text{tg EB}}$.

Mais FD = compl. DE qui mesure l'angle A; — FE = quadrant, mesure de l'angle droit dont le sinus est le sinus maximus; — DC = compl. AC; — EB = compl. AB; donc

$$\frac{\text{sinus du compl. de l'angle A} = \cos A}{\text{sinus de B}} = \frac{\text{tg compl. CA} = \cot AC}{\text{tg compl. AB} = \cot AB}$$

C. Q. F. D.

Autre démonstration. $\frac{\sin AB = \sin AB}{\sin BE = \cos AB} = \text{tg A}$ est égale (ainsi qu'il a été dit dans la discussion du rapport explicite du quadrilatère) $\frac{\sin AC}{\sin CD} = \text{tg AC} \times \frac{\sin DF}{\sin FE = R} = \cos A$ mais dans l'égalité $\text{tg A} = \text{tg AC} \times \cos A$, le membre à droite $=$ $\text{tg AB} \times 1 = \text{tg AB} \times R$ d'où $\frac{\text{tg AB}}{\text{tg AC}} = \frac{\cos A}{R}$; et $\frac{\text{tg AB}}{\text{tg AC}} =$ $\frac{\cot AC}{\cot AB}$; donc $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\cot AC}{\cot AB}$. C. Q. F. D.

2ème Corollaire. $\frac{\text{sin du compl. du côté opposé à l'angle droit}}{\text{sinus de l'angle droit}} = \frac{\text{tangente du complément de l'un des deux autres angles}}{\text{tangente de l'autre angle}}$.

Ainsi dans le triangle ABC je dis que:

$$\frac{\cos AC \text{ (côté opposé à l'angle B)}}{\sin B \text{ (droit)}} = \frac{\cot A}{\operatorname{tg} C}.$$

$\triangle$

Démonstration. L'angle D de FCD du quadrilatère en question étant droit, on aura $\frac{\sin CD}{\sin \text{maximus}} = \frac{\operatorname{tg} DF}{\operatorname{tg} C}$. Mais $CD = \text{compl. } AC$; — $DF = \text{compl. } ED$ (arc opposé à l'angle A); donc dans le triangle ABC, $\frac{\cos AC}{\sin B} = \frac{\cot A}{\operatorname{tg} C}$. C. Q. F. D.

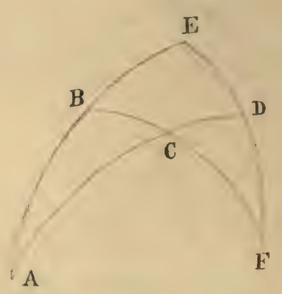
Cette relation est une de celles qui reviennent le plus fréquemment dans les questions dérivant de cette figure.

3ème Corollaire. $\frac{\text{tangente du complément de l'angle non droit}}{\text{tg. du côté situé entre cet angle et l'angle droit}} = \frac{\text{sinus du compl. du côté opposé à l'angle droit}}{\text{sinus du 3ème côté}}$ c. à d. $\frac{\cot A}{\operatorname{tg} AB} = \frac{\cos AC}{\sin BC}$. En effet dans le quadrilatère en question on a $\frac{\operatorname{tg} DF = \operatorname{tg} \text{(compl. de l'angle A}}{\operatorname{tg} AB} = \frac{\text{sinus } DC = \cos AC}{\text{sinus } CB}$, par la raison que dans les deux triangles ABC, DCF, les angles en C sont égaux, pendant que les angles en B et en D sont droits. C. Q. F. D.

Ce théorême n'est pas d'un usage fréquent, par la raison que la recherche de l'inconnue nécessite trois connues, tandis que on y arrive autrement moyennant deux connues.

4ème Corollaire. Dans un triangle rectangle, tout angle autre que l'angle droit mesure le complément de la largeur du complément du côté opposé à l'angle droit, largeur dont la plus grande mesure l'autre angle non droit, et récipro-

quement le côté opposé à l'angle droit mesure le complément de l'arc dont la largeur est le complément de l'angle non droit, largeur dont la plus grande mesure l'autre angle non droit.



Reprenons la figure précédente et soit l'angle A du triangle ABC mesuré par ED complément de FD, lequel FD est la *largeur* de CD et la plus grande par rapport l'angle C; DC sera le complément de AC, donc l'angle A est mesuré par le complément de la largeur du complément de AC, largeur qui est la plus grande par rapport à l'angle C. Également le côté AC est le complément de CD, largeur de l'arc FD, complément de l'angle A; doncA C est le complément de l'arc dont la largeur est le complément de l'angle A, largeur qui est la plus grande par rapport à l'angle C.

Ce théorême a son analogue dans la théorie de la figure supplémentaire. (1)

Conclusion de ce chapitre.

Sachez que des personnes éminentes dans la science ont trouvé à redire à cette figure à raison du rapide accroissement des tangentes des arcs qui dépassent la huitième partie du cercle. Les tangentes en effet augmentent rapi-

(1) Chapitre précédent *conséquences et accessoires de la figure supplémentaire*. Théoréme d'Abou Nasr.

dement au delà du rayon, car déjà la tangente de la huitième partie du cercle (45°) est égale au rayon. Ainsi si vous inscrivez les tangentes dans une table où les arcs augmentent par degrés égaux, les différences des tangentes au delà de 45° deviennent très considérables. C'est pourquoi on n'a pas grande confiance à prendre dans ces tables les tangentes en modifiant ce qui se trouve entre les lignes comme cela se passe pour les autres tables. — Cependant si nous partageons les arcs (en deux catégories), nous trouverons que l'objection qu'on a faite de ce chef à cette figure n'est pas fondée, du moment qu'il n'est pas indispensable de prendre les tagentes dans les tables. (1) En toute circonstance nous pourrons opérer en nous servant des tangentss de la huitième partie du cercle, parce que les tangentes ont des propriétés qu'on ne trouve pas dans les sinus, et qui permettent de se servir des unes pour les autres. Nous en avons touché quelques mots au début de ce chapitre, et nous allons bientôt montrer comment on peut faire usage de toutes les tangentes en se bornant à connaître les tangentes des arcs moindres que la huitième partie du cercle.

On a vu par ce qui précède que des quatre quantités proportionnelles qu'on rencontre dans toutes les variétés de cette figure, les deux sont des sinus, (dont l'un est la plupart du temps le plus grand sinus); et les deux autres des tangentes et qu'on trouve la quantité inconnue au moyen d'une multiplication et d'une division. Prenons le rayon égal à l'unité, l'inconnue sera un sinus ou une tangente. — Si l'inconnue est un sinus, on la déterminera soit par la multiplication de deux tangentes entre elles; soit par la division d'une tangente par une autre; — si l'inconnue est

---

(1) Le texte porte واذا انصفنا من القسا لم نجب ان نحكم بالقدح فى هذا الشكل من هذه الجهة لان اخذ الاظلال ليس بواجب ان يكون من الجداول

une tangente on la déterminera soit par la multiplication d'un sinus par une tangente, soit par la division d'un sinus par une tangente, soit enfin par la division d'une tangente par un sinus. Ce qui fait cinq cas.

1er Cas. L'inconnue est un sinus, et elle est déterminée par la multiplication de deux tangentes. — Dans ce cas les tangentes ne peuvent être toutes les deux plus grandes que le rayon, car le rapport de l'unité à l'une d'elles doit être égal au rapport de l'autre tangente au sinus cherché. Si donc l'une des deux tangentes était plus grande que l'unité. le sinus devrait être plus grand que l'autre tangente; et comme il n'existe pas de sinus plus grand que le rayon, l'autre tangente devrait être plus petite que le rayon. Par conséquent, ou bien toutes les deux tangentes seront moindres que le rayon, ou bien l'une d'elles sera plus grande et l'autre plus pétite que le rayon. Si toutes les deux sont plus petites que le rayon, il n'est pas nécessaire d'en parler ici plus longuement. Examinons donc le cas, où l'une est plus petite et l'autre plus grande que le rayon. Dans ce cas, si nous divisons la tangente moindre que le rayon par la tangente du complément de l'arc dont la tangente est plus grande que le rayon, le quotient sera le produit même de la multiplication de l'une de ces tangentes par l'autre d'après ce qui a été prouvé au commencement de ce chapitre. Et lors même qu'indépendamment de ce qui rapporte aux différentes formes de cette figure, on aurait à faire la multiplication de deux tangentes qui seraient toutes les deux plus grandes que le rayon, afin de se procurer une autre tangente, nous multiplierions la tangente du complément du multiplicateur par la tangente du complément du multiplicande et nous aurions pour produit la tangente du complément de l'arc cherché, d'après ce qui a été déjà prouvé.

2ème Cas. L'inconnue est un sinus, et elle est déterminée par la division d'une tangente par une autre. Ici le divi-

dende sera moindre que le diviseur puisqu'il faut que le quotient de la division soit moindre que l'unité. — Si les deux tangentes sont plus grandes que le rayon, nous divisons la tangente du complément de l'arc diviseur par la tangente du complément de l'arc dividende, le quotient sera le sinus cherché; car le rapport de deux tangentes est toujours égal au rapport inverse des tangentes de leurs compléments, comme cela a eté déjà prouvé; l'une de deux tangentes est plus grande et l'autre moindre que le rayon — Dans cette hypothèse si c'est le diviseur qui est le plus grand, nous multiplions le dividende par la tangente du complément de l'arc diviseur; le résultat en sera le sinus cherché. — Que si c'est le dividende qui est le plus grand. il y a impossibilité d'après ce que nous avons déjà dit.

3ème *Cas.* L'inconnue est une tangente déterminé par la multiplication d'un sinus par une tangente. Si la tangente qui sert de facteur est plus grande que le rayon, nous diviserons le sinus par la tangente du complément de l'arc; le quotient sera la tangente cherchée; que si le quotient ainsi obtenu était plus grand que l'unité, nous divisons l'unité par ce quotient; le résultat sera la tangente du complément de l'arc cherché; que vous pourrez trouver dans le 1ère table du huitième du cercle. C'est ce qu'on devra faire pour toute tangente plus grande que le rayon, lorsqu'on voudra en connaître l'arc par la table. Que si la tangente facteur était moindre que le rayon, alors, la tangente cherchée aussi serait moindre que le rayon, ainsi que cela a été expliqué.

4ème *Cas.* L'inconnue est une tangente déterminée moyennant la division d'un sinus par une tangente. Si le diviseur est plus grand que le rayon, nous multiplions le sinus par la tangente du complément de l'arc diviseur. Le produit sera la tangente cherchée.

5ème *Cas.* L'inconnue est une tangente déterminée moyen-

nant la division d'une tangente par un sinus. Si le dividende est plus grand que le rayon nous divisons la tangente du complément de l'arc dividende par le sinus; le quotient sera la tangente du complément de l'arc cherché; car ainsi que nous l'avons déjà prouvé, le résultat de la division de la tangente d'un arc, ou de la tangente de son complément par une même quantité donnent deux tangentes dont l'une est le complément de l'autre.

Ces règles sont applicables s'agissant de quatre quantités dont l'une est égale au rayon; sinon, lorsqu'on se trouve en présence de deux sinus et de deux tangentes quelconques, les cas des multiplications et des divisions à considérer sont plus nombreux : mais la manière dont on devra procéder n'en reste pas moins la même d'après tout ce que nous venons de dire.

Il demeure donc établi que dans tous les cas on peut procéder par les tangentes tout en ne connaissant que les tangentes des arcs moindres que le huitième du cercle. Dès lors aussi s'évanouissent les reproches que des esprits aveuglés ont essayé de soulever contre l'usage de cette figure.

CHAPITRE VII.

Développements complémentaires sur la manière par laquelle on arrive à connaître les inconnues par les connues dans les triangles sphériques.

Nous avons déjà dit, dans le Chapitre IV^{ème}, que le rapport simple renferme quatre termes. Pour arriver maintenant à connaître les inconnues en se servant des connues, au moyen du rapport, il faut absolument connaître les trois quantités qui donneront ensuite l'inconnue. Or tout triangle

a trois angles et trois côtés: si de ces six quantités vous ne connaissez pas les trois, il vous est impossible de trouver les autres. Dans les triangles rectangles, l'angle droit étant toujours connu, il suffit de deux autres connues pour arriver à déterminer les inconnues. — Ces deux connues ne peuvent être que deux côtés, un angle et un côté, deux angles. — Si l'on connaît les deux côtés, ceux-ci seront ou bien les côtés qui comprennent l'angle droit, ou bien un côté opposé et un côté adjacent à l'angle droit. — Si les données sont un côté et un angle, le côté sera opposé à l'angle droit ou opposé à l'angle connu, ou bien enfin le 3ème côté.

Nous avons ainsi six cas pour chacun desquels on peut procéder par la *figure supplémentaire* aussi bien que par la *figure ombrée.* C'est ce que nous allons faire, en nous bornant toutefois à établir la manière dont les calculs doivent être faits, sans revenir sur les démonstrations qui ont été déjà fournies.

Comment on doit procéder pour trouver les inconnes au moyen des connues dans les triangles rectangles d'après les règles de la figure supplémentaire.

I. On connaît le côté opposé à l'angle droit et un autre côté. D'après ce qui a été démontré au sujet de la 1ère espèce de la figure supplémentaire:

$$\frac{\text{cosinus du côté opposé à l'angle droit} \times R}{\text{cosinus de l'autre côté connu}} = \text{cosinus du côté inconnu.}$$

Pour les angles: d'après les principes de la figure supplémentaire: $\frac{\text{sinus du côté opposé à l'angle inconnu} \times R}{\text{sinus du côté opposé à l'angle droit}} =$ sinus de l'angle inconnu.

II. On connaît les deux côtés qui comprennent l'angle droit. D'après la *conséquence 1ère* :

$$\frac{\text{cosinus de l'un d'eux} \times \text{cosinus de l'autre}}{\text{R}} = \text{cosinus du côté}$$

opposé de l'angle droit.

On se servira ensuite des côtés pour trouver les angles, ainsi qu'il a été dit au I.

III. On connaît un angle autre que l'angle droit et le côté opposé à cet angle.

D'après le principe fondamental de la figure supplémentaire:

$$\frac{\text{sinus du côté connu} \times \text{R}}{\text{sinus de l'angle connu}} = \text{sinus du côté opposé à l'an-}$$

gle droit.

On connaîtra ensuite le 3ème côté et le 3ème angle d'après ce qui a été dit au I.

IV. On connait un angle autre que l'angle droit et le côté opposé à l'angle droit.

D'après le principe fondamental de la figure supplémentaire:

$$\frac{\text{sinus de l'angle connu} \times \text{sinus du côté opposé à l'angle droit}}{\text{R}}$$

= sinus du côté opposé à l'angle connu. On connaîtra ensuite le côté et l'angle restant d'après ce qui a été dit au I.

V. On connaît un angle autre que l'angle droit et le côté compris entre l'angle droit et cet angle.

D'après la conséquence 2ème:

$$\frac{\text{sinus de l'angle connu} \times \text{cosinus du côté connu}}{\text{R}} = \text{cosinus}$$

de l'angle opposé au côté connu. On trouvera ensuite les deux autres côtés comme il a été dit au III.

VI. On connaît les deux angles autres que l'angle droit.

D'après la conséquence 2ème:

$$\frac{\text{cosinus de l'un des angles} \times \text{R}}{\text{sinus de l'autre angle}} = \text{cosinus du côté opposé}$$

au 1er angle. On trouvera ensuite les deux autres côtés d'après ce qui a été dit au III.

Ou bien en suivant les règles de la figure ombrée.

I. On connaît deux côtés, dont l'un opposé à l'angle droit.

1° D'après la *conséquence 1ère du chapitre de la figure ombrée*

$$\frac{\text{cotangente du côté opposé à l'angle droit} \times \text{R}}{\text{cotangente de l'autre côté}} = \text{cosinus}$$

de l'angle compris entre les deux côtés connus.

2° D'après le principe fondamental de cette figure:

$$\frac{\text{tangente de l'angle ainsi trouvé} \times \text{sinus du côté situé entre cet angle et l'angle droit}}{\text{R}} = \text{tangente du côté opposé à cet angle.}$$

3° D'après la 2ème conséquence

$$\frac{\text{tangente de l'angle connu} \times \text{cosinus du côté opposé à l'angle droit}}{\text{R}} = \text{cotangente}$$

de l'angle restant; ou bien: D'après la conséquence 1ère

$$\frac{\text{cotangente du côté opposé à l'angle droit} \times \text{R}}{\text{cotangente du côté situé entre l'angle inconnu et l'angle droit}}$$

= cosinus de l'angle inconnu.

II. On connaît les deux côtés qui comprennent l'angle droit.

1° D'après la règle fondamentale de cette figure:

$$\frac{\text{tangente de l'un de ces côtés} \times \text{R}}{\text{sinus de l'autre côté}} = \text{tangente de l'angle}$$

opposé au 1er côté. De la même manière on connaîtra l'autre angle.

Ensuite, pour le côté opposé à l'angle droit.

2° D'après la *conséquence 1ère*;

$$\frac{\text{cosinus de l'un des deux angles} \times \text{cotg. du côté situé entre cet angle et l'angle droit}}{\text{R}}$$

= cotangente du côté opposé à l'angle droit; ou bien, en

vertu de la conséquence 2ème $\frac{\text{cotg. de l'un des deux angles} \times \text{R}}{\text{tangente de l'autre côté}}$ = cosinus du côté opposé à l'angle droit.

III. On connaît un angle autre que l'angle droit et le côté qui lui est opposé.

D'après le principe fondamental de cette figure: $\frac{\text{tangente du côté connu} \times \text{R}}{\text{tangente de cet angle}}$ = sinus du côté situé entre l'angle droit et l'angle connu. On trouvera ensuite les autres inconnues suivant ce qui a été dit au II.

IV. On connaît un angle autre que l'angle droit et le côté opposé à l'angle droit.

D'après la conséquence 1ère $\frac{\text{cot. du côté opposé à l'angle droit} \times \text{R}}{\text{cosinus de l'angle connu}}$ = cot du côté situé entre l'angle droit et l'angle connu. On connaîtra ensuite les autres inconnues d'après le I.

V. On connaît un angle autre que l'angle droit, et le côté compris entre ces deux angles.

D'après le principe fondamental de cette figure: $\frac{\text{tg. de cet angle} \times \text{sinus de ce côté}}{\text{R}}$ = tg. du côté opposé à cet angle; Pour trouver les autres inconnues on se conformera au II et au III.

VI. On connaît les trois angles.

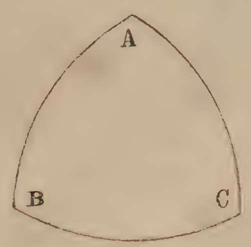
D'après la conséquence 2ème: $\frac{\text{cot. de l'un des angles} \times \text{R}}{\text{tg. de l'autre angle}}$

Pour le reste on se conformera au IV.

Sachez que le but qu'on s'est proposé par cette analyse n'est point de limiter les procédés à suivre pour trouver les inconnues, mais bien de montrer que, pour ce qui concerne la recherche des inconnues dans les triangles rectangles qui constituent la base de cet art, on peut procéder par l'une ou par l'autre de ces deux figures, car en

définitive, la personne intelligente qui se sera bien pénétrée des démonstrations saura toujours beaucoup plus facilement retrouver les procédés de ce calcul qu'elle ne saurait servilement retenir ces formules.

Ainsi si l'on est bien pénétré de ce qui a été établi concernant les propriétés des tangentes et les procédés auxquels donne lieu la figure ombrée, on aura plus d'un moyen pour trouver une inconnue par une seule et même démonstration.



Soit p. e. le triangle rectangle ABC. D'après le principe fondamental de la figure ombrée si l'on connaît le côté AB et l'angle A, l'angle B étant droit et $R = 1$ et qu'on veuille connaître le côté BC de la même manière dont on aura $\text{tg A} \times \sin \text{AB} = \text{tg BC}$, on aura $\frac{\cot \text{A}}{\sin \text{AB}} = \cot \text{BC}$ et $\frac{\sin \text{AB}}{\sin \text{C}} = \text{tg BC}$.

De même si l'on connaît l'angle A et le côté BC et qu'on veuille connaître le côté AB, on aura: $\frac{\text{tg. BC}}{\text{tg. A}} = \sin \text{AB}$, $\text{tg BC} \times \cot \text{A} = \frac{\cot \text{A}}{\cot \text{BC}} = \frac{\cot \text{BC}}{\text{tg B}} = \sin \text{AB}$.— ou bien encore nous divisons cot BC par cot A, et l'unité par le quotient de cette division.

Et puisque d'après la *conséquence 1ère* $\cos \text{A} \times \cot \text{AB} = \cot \text{AC}$, on aura aussi $\frac{\cos \text{A}}{\text{tg AB}} = \frac{\text{tg AB}}{\cos \text{A}} = \text{tg AC}$. Ainsi encore en partant de la relation $\frac{\cot \text{AC}}{\cot \text{AB}} = \cos \text{A}$, on aura

aussi $\frac{\text{tg AB}}{\text{tg AC}} = \text{tg AB} \times \cot \text{AC} = \text{tg AC} \times \cot \text{AB}$

$\frac{\frac{1}{\text{tg AC}}}{\text{tg AB}} = \cos \text{A}$.

Enfin d'après la 2ème conséquence, de même que tg A × cos AC = cot C, on aura aussi $\frac{\cos \text{AC}}{\cot \text{A}} = \cot \text{C}$ et $\frac{\cot \text{A}}{\cos \text{AC}} = \text{tg C}$.

D'où il résulte que si la figure supplémentaire présente des avantages sur la figure ombrée pour ce qui est de l'analogie dans les procédés, cette dernière à son tour est préférable pour ce qui est de la variété des opérations auxquelles elle se prête aisément.

Ceci termine ce que nous avions à dire sur les triangles sphériques rectangles. Nous passons maintenant aux autres triangles sur lesquels nous n'entrerons pas dans de grands développements, la nécessité ne s'en faisant pas sentir.

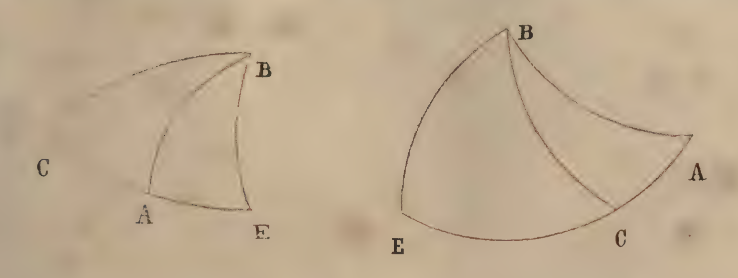
Des autres triangles.

Pour ce qui est des triangles acutangles ou obtusangles, nous prenons le même point de départ à savoir : qu'il faut connaître dans chacun d'eux trois choses pour pouvoir en tirer une quatrième, par la voie de la proportion, d'après ce que nous avons déjà dit :

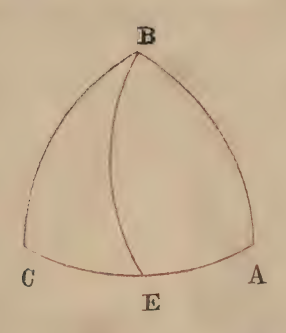
Les trois connues
1. 2 côtés, un angle.
2. 2 angles, un côté.
3. 3 côtés.
4. 3 angles.

Le 1ère et le 2ème cas se subdivisent en deux autres, selon que l'angle connu est compris entre les deux côtés ou bien opposé à l'un d'eux et selon que le côté connu est situé entre les deux angles connus, ou bien opposé à l'un d'eux.

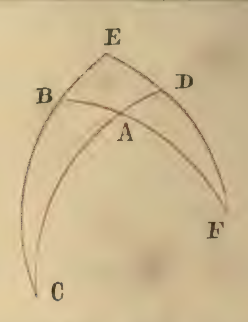
De là six cas à examiner ; les suivants :



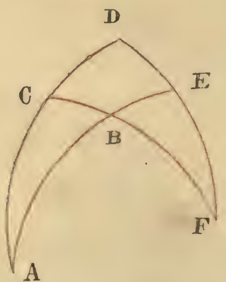
I. On connaît deux côtés et l'angle compris entre ces côtés. Dans le triangle ABC on connaît les côtés AB, AC et l'angle A. Faites passer par l'un des angles inconnus et par le pôle du côté qui lui est opposé un arc de grand cercle. Soit BE cet arc; les angles E seront droits. — Dans les triangles acutangles le point E tombera dans l'intérieur du triangle; la même chose arrivera dans les triangles obtusangles en B. Si l'angle obtus est A ou C, le point E tombera hors du triangle du côté de l'angle obtus. — Maintenant dans le triangle ABE on connaît AB et l'angle A.



On trouvera donc les autres éléments de ce triangle comme il a été dit au IV des triangles rectangles: alors dans le triangle BCE on connaîtra BE, CE, et l'on aura l'autre côté et les autres angles d'après le II. On arrivera ainsi à déterminer les angles B, C et le côté BC, en vertu soit des principes de la figure supplémentaire soit de ceux de la figure ombrée.

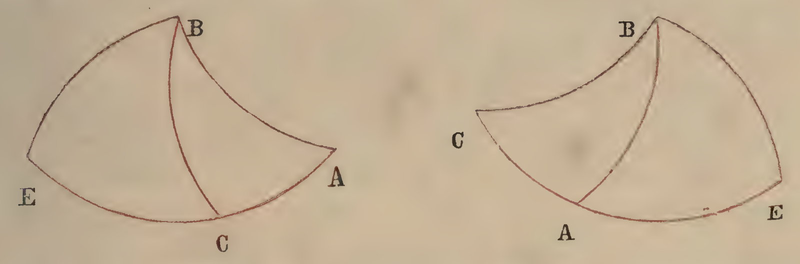


Autrement. Prolongez CA, CB, de manière que CE, CD deviennent égaux à deux quadrants, et ED jusqu'à ce qu'il rencontre AB en F; achevez le quadrilatère ACEF. Dans le triangle AFD l'angle A et le côté AD (complément de AC) sont connus; l'angle D est droit; vous en connaîtrez donc le reste d'après le V. Dans le triangle FEB, le côté FB (FA+AB) ainsi que l'angle F sont connus, l'angle E est droit; vous connaîtrez donc le reste par le IV; et encore par la figure supplémentaire qui donne $\frac{\sin FA}{\sin AD} = \frac{\sin FB}{\sin BE}$, on connaîtra BE; mais CB = compl. BE; $\widehat{CBF} = 2 - \widehat{EBF}$ (connu); et DE fera connaître $\hat{C}$.

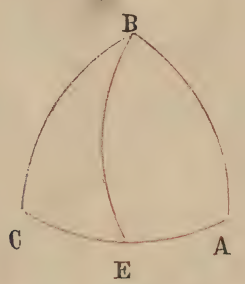


Autrement. Prolongez AC, AB, jusqu'à ce que AE, AD deviennent égaux à deux quadrants; complétez le quadrilatère ADBF; BE, CD compl. de AB, AC, sont connus. D'après les principes de la figure ombrée $\frac{\text{tg } BE}{\text{tg } CD} = \frac{\sin FE}{\sin FD}$;

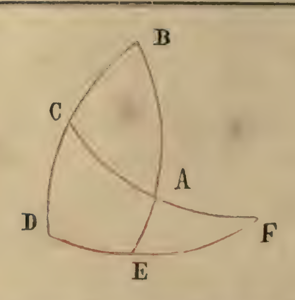
mais ce dernier rapport est connu ED étant la mesure même de l'angle A. Ainsi FD, FE, sont connus d'après ce qui a été établi dans le Livre II. Maintenant dans le triangle FEB, E étant un angle droit, et les côtés EB, EF étant connus, tout est connu. On obtient ainsi l'angle B. Mais FB étant connu, dans le triangle FCD, les côtés FD, DC sont connus, l'angle D est droit, et l'on connaîtra FC et par conséquent BC aussi.



II. On connaît deux côtés et un angle non compris entre ces côtés. On connaît dans le triangle ABC, les côtés AB, BC et l'angle A.

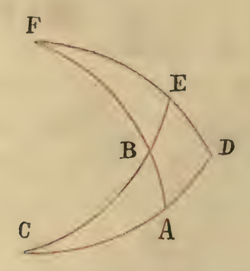


D'après les principes de la figure supplémentaire, les rapports des sinus des angles étant comme les sinus des côtés opposés à ces angles, l'angle C est connu; traçons comme d'ordinaire l'arc BE perpendiculaire sur AC; dans le triangle ABE on connaît A et AB; l'angle E étant droit, le reste sera connu d'après le IV. Maintenant dans le triangle BCE, on connaît BC, BE et par conséquent le reste aussi d'après le I ci-dessus; on connaîtra ainsi dans le triangle ABC, AC ainsi que les angles B et C.



Autrement. Complétez les quadrants BE, BD, et le quadrilatère BDFA. Dans le triangle FAE, on connaît l'angle A, le côté AE complément de AB, le reste donc sera aussi connu d'après le IV. Mais de ce que AE, CD sont comme AF, FC et comme les largeurs FE, FD, on connaîtra les deux arcs FC, FD par la double règle (c'est-à-dire celle de la figure supplémentaire et celle de la figure ombrée). Donc AC = FC − AF, l'angle A et l'angle B mesuré par DE sont connus. Alors l'angle C aussi devient connu d'après ce qui a été dit. Ou bien des rapports $\frac{\sin AE}{\sin CD}$ (connu) = $\frac{\sin FA}{\sin FC}$, et $\frac{\text{tg } AE}{\text{tg } CD}$ (connu) = $\frac{\sin FE}{\sin FD}$ et des deux arcs FA, FE également connus nous tirons chacun des deux arcs FC, FD. Et alors côté AC et arc ED (mesure de l'angle B) demeurent connus.

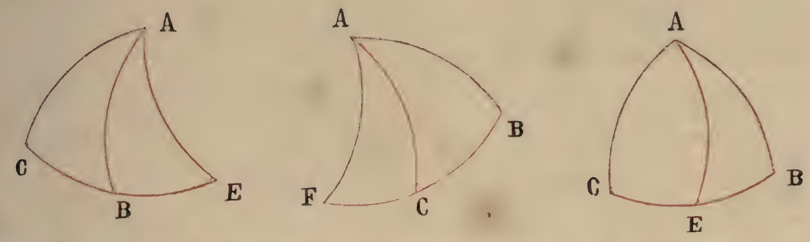
III. On connaît deux angles et le côté auquel ils sont adjacents. Angles $\hat{B}$, $\hat{C}$, et le côté BC.



Faites passer un arc de grand cercle par un des angles connus qui rencontre le côté opposé à angles droits.

Soit BE cet arc. Dans le triangle BCE le côté BC et l'angle C sont connus, l'angle E est droit, on connaîtra donc le reste par le V. Ensuite dans le triangle ABC vous connaîtrez l'angle A et les côtés AB, AC, par les deux méthodes comme cela a été expliqué dans les deux cas précédents.

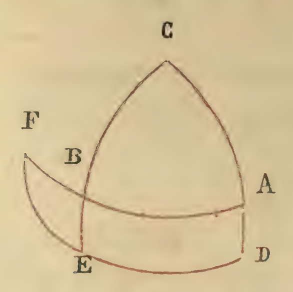
Autrement. Complétez les quadrants CE, CD et le quadrilatère FBCD. Dans le triangle BFE, nous connaissons le côté BE et l'angle B. Ces deux connues feront connaître le reste. ED alors fera connaître l'angle C; de même dans le triangle FDA on connaît F, et le côté FD qui féront connaître le reste, de sorte que dans le triangle ABC nous avons fini par connaître AB, AC, aussi bien que l'angle C.



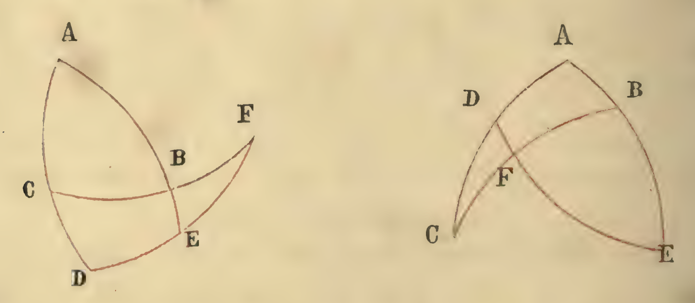
Autrement. Tracez un arc passant par A et perpendiculaire à BC en vertu de la figure ombrée on aura $\frac{\text{tg B}}{\text{tg C}}$ (rapport connu) $= \frac{\sin \text{CE}}{\sin \text{BE}}$. Ce rapport étant connu et BC aussi, chacun des arcs BE, CE sera connu d'après ce qui a été exposé dans le Livre III; et de ce que dans le triangle ABE on connaît AB, BE, et dans le triangle AEC, EC et l'angle C, par leur moyen on connaîtra le reste.

IV. On connaît deux angles et un côté non adjacent, (angles A, B et le côté BC, dans le triangle ABC). Comme, d'après la figure supplémentaire on a $\frac{\sin \text{A}}{\sin \text{B}} = \frac{\sin \text{BC}}{\sin \text{AC}}$, AC, sera connu. Tracez maintenant comme à l'ordinaire l'arc

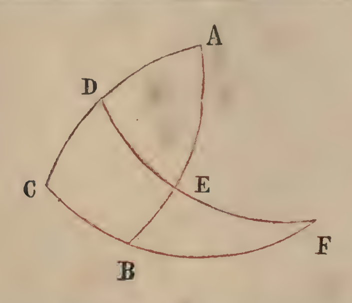
CE perpendiculaire sur AB. Dans le triangle BCE de ce que BC et l'angle B sont connus et dans le triangle ACE de ce que l'angle A et le côté seront connus on connaîtra le reste. V. ci-dessus le III.



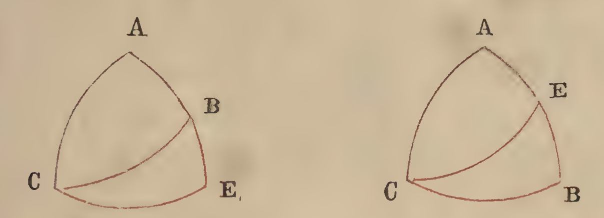
Autrement. Achevez les quadrants CE, CD et le quadrilatère CBFD vous connaîtrez AC comme il a été expliqué; ensuite l'angle C et le côté AB, V. ci-dessus le II. Inutile de nous répéter. Si les côtés que nous prolongeons pour compléter le quadrilatère ou l'un d'eux étaient plus grands qu'un quadrant, on prendrait sur le plus grand une portion égale à un quadrant et l'on ferait passer un arc de cercle de manière à compléter le quadrilatère par des quadrants. De cette manière on obtiendra le résultat cherché; mais les développements seraient inutiles après les explications que nous avons fournies.



V. On connaît les trois côtés. Complétez les quadrants en D et E et achevez le quadrilatère. AB, AC, étant connus, BE, CD le seront aussi. Mais BE, CD sont les incli-



naisons des arcs FB, FC, les angles D et E étant droits; leur rapport sera donc égal au rapport des sinus de leurs arcs, soit comme FB: FC (connu). Mais BC aussi est connu. Donc, d'après ce qui a été établi au Livre III, chacun des deux arcs FB, FC sera connu, et dans les triangles FBE, FCD, tous les deux rectangles, on connaîtra deux côtés; dès lors FE, FD seront connus et par conséquent l'arc DE, mesure de l'angle A. — Il en sera de même pour les deux autres angles.



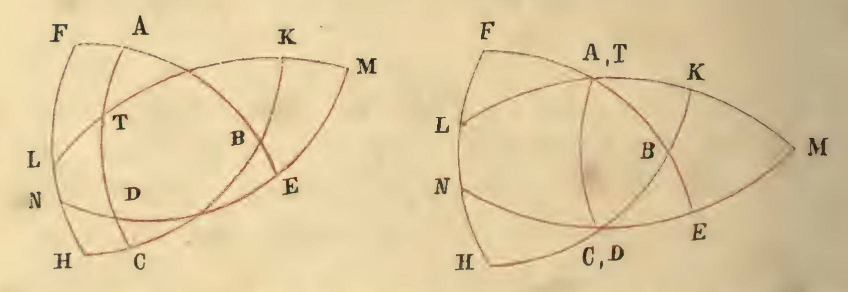
Si l'un des côtés AC p. e. était un quadrant, nous en ferions autant de AB aussi et nous trouverions l'arc EC; on aurait ainsi BE = AE — AB. Et BE, BC étant connus dans le triangle BEC, on aura dans le triangle BEC, EC, AC connus et les angles du triangle ABC seront déterminés.

VI. On connaît les trois angles du triangle ABC.

Dans le triangle ABC, prolongeons AB, AC jusqu'à ce que AD, AE deviennent deux quadrants; de même BA, BC de manière que BF, BH soient des quadrants; et faisons de CT, CK aussi deux quadrants. Traçons les arcs de grand



cercle DE, FH, TK; les points de rencontre seront L, M, N, et l'on aura ainsi formé le triangle LMN dont les côtés seront des arcs de grand cercle: les angles A, B, C, étant connus on connaît aussi DE, TK, FH; et K et H étant deux angles droits, L sera le pôle de KH; on aura de même M, pôle de TD, et N pôle de FE; maintenant TL, KM étant chacun le complément de KT, LM sera connu; ainsi que LN et MN; ainsi les trois côtés du triangle LMN seront déterminés, par conséquent ses angles aussi d'après le cas précédent, et par suite les arcs KH, DT, EF. Mais chacun des arcs KC, BH étant égal à un quadrant, le complément de HK sera égal à BC; ainsi BC sera connu; disons en autant de AB, AC. Par ce procédé on arrivera donc à connaître les côtés du triangle ABC.



Si un des côtés est égal à un quadrant ou s'il en est plus grand, vous aurez la figure ci-dessus dont l'explication a lieu d'après ce qui a été déjà dit. Vous traiterez de la même manière les autres cas analogues à celui-ci et au précédent en tirant les connues des inconnues par la règle de la fi-

gure ombrée si cela est possible; pour ma part j'ignore ce procédé que je n'aurais pas manqué d'insérer dans ce traité si je le connaissais. Quant aux détails du calcul je les ai supprimés pour ces six derniers cas, par la raison que je désirais être court et aussi parceque ces calculs ne sont pas fréquents dans la pratique. D'ailleurs ceux qui auront bien compris ce qui a été dit jusqu'ici n'éprouveront pas de difficulté à dégager les calculs nécessaires.

Ayant ainsi montré la méthode à suivre pour connaître les valeurs des côtés et des angles dans les triangles rectangles acutangles et obtusangles formés par les intersections des arcs de grand cercle sur la surface de la sphère, nous avons montré que la connaissance sur ce point implique la connaissance des angles et des côtés des sept triangles qui accompagnent le triangle formé sur la surface de la sphère, et nous avons établi aussi la manière de parvenir par les connues aux inconnues dans les triangles sphériques en général. On voit aussi comment toutes ces règles se rattachent à la théorie du quadrilatère, puisque il suffit pour cela que les angles d'un triangle quelconque soient modifiés de manière à ce que quelques unes de ses colonnes deviennent des quadrants. La différence essentielle étant que pendant que dans le quadrilatère les rapports sont composés, dans ces autres cas ils se présentent sous une forme simple. C'est pourquoi nous avons cru devoir ajouter ce livre aux quatre précédents.

Terminons donc ici ce que nous avions à dire, en proclamant les louanges du Seigneur et de son Prophète. En Dieu seul est la perfection de la connaissance. En lui est notre refuge et notre retour.

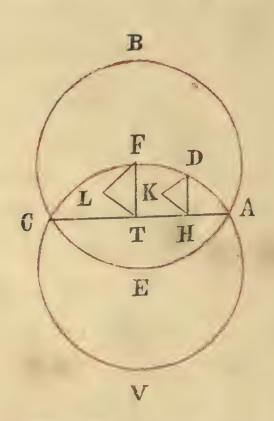
L'auteur, que la miséricorde du Seigneur soit sur lui, a achevé la composition de ce livre le 21, Djémazi-ul-oula de l'an 658. — Et il appartient à celui qui l'a écrit le pauvre Abdoullah Abdoul-Kiafi-Ben-Abdoul-Medjid-Ben-

Obéidoullah. Jeudi, 15 Djémazi-ul-akhiret de l'an 677, dans le bourg de Chirwan des bourge de Zenkibabad. Gloire à Dieu.

Extrait du Livre de Thabit-Ben-Korrah.

De la figure du quadrilatère et des rapports composés.

Si l'on nous propose de donner au moyen du sinus quelque démonstration de ce que Ptolémée a voulu prouver par la figure du quadrilatère, (2) nous pouvons dire que nous avons trouvé une démonstration plus facile et plus directe que celle de Ptolémée, une démonstration qui n'emprunte rien aux siennes ni aux quatre lemmes dont il les fait précéder et qui ramène tous les cas à deux, l'un pour le rapport implicite et l'autre pour le rapport explicite.

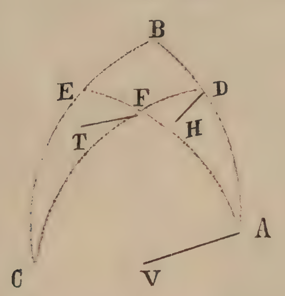


Lemme. Soient ABCE, ADCV deux grands cercles d'une sphère qui se coupent aux points A, C. Prenez sur le cercle ADCV deux arcs, chacun plus petit qu'une demie-circonférence. Soient ces arcs AD, AF, des points D, F tirez deux perpendiculaires sur le plan du cercle ABCE, je dis que $\frac{\text{sin AD}}{\text{sin AF}} = \frac{\text{perpend. de D}}{\text{perpend. de F}}$.

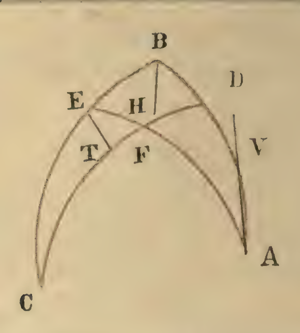
La preuve en est la suivante:

L'intersection de ces deux cercles est un diamètre. Abaissons de D et F sur AC les deux perpendiculaires DH, FT. Si elles sont aussi perpendiculaires sur le plan du cercle ABCE, nous aurons déjà prouvé ce que nous voulons prouver, car ces deux perpendiculaires seront évidemment les sinus des arcs AD, AF; que si ces deux perpendiculaires sur AC n'étaient pas perpendiculaires sur ABCE, abaissons des points D, F sur ABCE les perpendiculaires DK, FL; ces deux lignes seront parallèles; mais DH, FT, aussi sont parallèles, donc les angles $\widehat{HDK}$, $\widehat{TFL}$ sont égaux; d'ailleurs $\widehat{DHK}$, $\widehat{FTL}$ sont droits, et les triangles DHK, FTL sont semblables — de là $\frac{DH}{FT} = \frac{\sin AD}{\sin AF} = \frac{\text{perp. } DK}{\text{perp. } FL}$.
La démonstration serait la même si l'un des deux arcs était du côté de CA vers V. — C. Q. F. D.

Ceci posé; menez aux deux arcs AB, BC, les deux arcs AE, CD par F. je dis que $\frac{\sin AB}{\sin BD} = \frac{\sin AE}{\sin EF} = \frac{\sin FC}{\sin CD}$.



Démonstration. Des points A, D, F menez au plan du cercle BC les perpendiculaires AV, DA, FT. Prenons FT moyenne entre les perpendiculaires AF, DH, on aura toujours $\frac{AV}{DH} = \frac{AV}{FT} \times \frac{FT}{DH}$. Mais $\frac{AV}{DH} = \frac{\sin BA}{\sin BD}$, donc aussi $\frac{AV}{FT} = \frac{\sin AE}{\sin EF}$, et $\frac{FT}{DH} = \frac{\sin FC}{\sin CD}$ ce qui prouve bien que la relation des sinus était bien celle que nous avions indiquée.



Pour ce qui est du rapport explicite on aura
$\frac{\sin\ AD}{\sin\ DB} = \frac{\sin\ AF}{\sin\ FE} \times \frac{\sin\ EC}{\sin\ CB}$.

Le procédé démonstratif est absolument le même que tout à l'heure. Des points A, B, E, menez AV, BH, ET, perpendiculaires sur le plan du cercle CD. Soit ET moyenne entre les deux autres, on aura : $\frac{AF}{BH} = \frac{\sin\ AD}{\sin\ DB} = \frac{AV}{ET}\left(\frac{\sin\ AF}{\sin\ FE}\right) \times \frac{ET}{BH}\left(\frac{\sin\ EC}{\sin\ CA}\right)$. C. Q. F. D.

Les autres démonstrations sont analogues aux précédentes.

Dieu seul possède la science.

Copié sur l'écriture de l'auteur, que la miséricorde du Seigneur soit sur lui.



TABLE

DES CHAPITRES ET DES MATIÈRES.

LIVRE I.

LIVRE II.

LIVRE III.

LIVRE IV.

LIVRE V.



LISTE

DES AUTEURS ET DES OUVRAGES

CITÉS DANS CE TRAITÉ.

MATHÉMATICIENS GRECS.

EUCLIDE. (اوقليدس) v. 285 av. J. C.

Les éléments كتاب الاصول P. P. 3-7-18-88-175.

MÉNÉLAUS. (مانالاوس) v. 80 après J. C.

كتاب فى الكرات (Des sphères-On dit ordinairement les *sphériques*. Cet ouvrage dont l'original grec n'a pu être retrouvé n'existe qu'en Arabe.)

P. 107 — P. 141 Mention du commentaire qu'en avait fait Abou-Nasr.

THÉODOSE. (ثاودوسيوس) v. 100 av. J. C.

كتاب فى الاكر = Les sphériqnes. P. P. 86-108-113-114-134.

PTOLÉMÉE. (بطليوس) v. 125. après J. C.

المجسطى (L'almageste.) P. P. 50-63-65-66-72-87-88-92-105-107-149.

MATHÉMATICIENS ARABES.

ABOUL-VÉFA. ابو الوفا محمدبن محمد البوزجانی

Né à Bouzdjan dans le Khorassan l'an 939–940 mort en 998 à Bagdad — V. Hadji Khalfa N° 9051. —

Inventeur incontesté, d'après Abou-Rihan, de la théorie des tangentes P. 141. —

Traducteur d'Aristarque, Aristippe et Diophante, commentateur d'Euclide. (V. Wenrich. De auct. Græcor. p. XXVII.)

Dispute à Abou-Nasr la priorité du théorème de la proportionnalité des sinus des arcs et des angles dans les triangles sphériques P. 125.

En tout les cas, il en a fait le premier une application générale P. 137.

Autres démonstrations et théorèmes. P. 125–128–129–130–131–137.

ABOU-NASR. الامیر ابو نصربن عراق

Auteur de l'Almageste Royal المجسطی الشاهی P. 141. Auteur d'un commentaire sur les Sphériques de Ménélas. P. 141 (d'où il paraîtrait que c'est le Abou-Nasr Mansour cité par Wenrich p. 211. comme commentateur de Ménélas sans autres détails. L'identité du commencement de son nom avec celui du célèbre Farabi — Abou-Nasr Mehmed ibn Mehmed, — peut même avoir induit en erreur Wenrich qui attribue à Farabi une traduction de l'Almageste.)

Dispute à Aboul-Véfa la priorité quant au théorème de la proportionnalité des sinus dans les triangles sphériques. P. 139–144.

Auteur d'une solution ingénieuse du problème: Étant données la somme ou la différence de deux arcs et le rapport de leurs sinus, trouver ces arcs. P. 81. —

ABOU-RIHAN ALBIROUNI. ابو ريحان البيرونى

De Biroun ville de Kharesm. Mort en 1038–1039.
Hadji Khalfa N° 7420.

— Auteur du مقاليد علم هياة ماحدث فى بسيط الكرة وغيره P. 125.
مقاليد العلم ماحدث فى بسيط الكرة P. 141.

Traducteur ou Abréviateur de l'Almageste. (Wenrich p. XXVIII)

— Est le premier qui a pris le rayon pour unité P. 135.

— Donne une démonstration de la proportionnalité des sinus des arcs et des angles dans le triangle sphérique. P. 133.

— Divise le diamètre en deux parties chacune de 120 minutes. P. 72.

— Ce qu'il appelle largeur d'un arc 128.

V. aussi P. 143. —

ABOU-MAHMOUD ALHODJENDI. ابو محمود خان بن الخضر الخجندى vers 992.

(V. Zur Gesch. der Math. von Hankel. P. 246.)

Dispute à Aboul Véfa la priorité en ce qui concerne le théorème de la proportionnalité des sinus des angles et des arcs. P. 125–133–141.

ABOU-DJAFAR ALHAZIN. ابو جعفر الخازن

(Hadji Khalfa N° 4137)

(Le surnom de Hazin = bibliothécaire.) vers 1000. (V. Hankel. Zur Gesch. der Math. P. 246)

Wenrich cite son commentaire du Xème Livre d'Euclide. (De auct. Græc. P. 187.)

Auteur des recherches partielles sur l'inclinaison etc. مطالب جزئية ميل الميول الجرونه(؟) والمطالع فى الكرة المستقيمة P. 132. 138.

ABOUL-FAZL AL NÉRIZI. ابو الفضل النريزى

(Hadji Khalfa N° 2548)

Autrefois on lisait ce mot Tebrizi. (V. Wenrich de auct. Græc. P. 180) L'un des principaux commentateurs d'Euclide, et auteur de tables astronomiques selon la manière Indienne. (Hankel. ib. cet astronome géomètre vivait sous le caliphe Mutazid. (892–901) Neiriz est une ville de Chiraz. Son commentaire sur l'Almageste. شرح المجسطى démonstration d'un théorème de trigonométrie sphérique. P. 132. 138.

ELKIA KOUSHYAR-BEN-LEBBAN ELDJÉBÉLY(?) الكيا كوشيار بن لبان الجبلى

(Wenrich ib. P. 235 parle de lui comme d'un abréviateur de Ptolémée.) —

D'après Abou-Reihan c'est Elkia qui a donné son nom au théorème ou à la figure supplémentaire. 141. —

حسام الدين على بن فضل الله السالار

HOUSSAM-UDDIN-ALI-BN-FAZLULLAH ESSALAR

Auteur d'un traité sur le quadrilatère qui a servi de base au traité de Nasiruddin. P. 25–28.

SABIT-IBN-KOURAH. ثابت بن قره

Un des plus célèbres traducteurs des ouvrages de science grecs. On l'appelait aussi Alharrani Essabi. — Hadjikhalfa N° 3374. — Né en 836. — Mort en 901. à Bagdad.

Entrait de son ouvrage sur le quadrilatère. P. 141.

فى الشكل القطاع والنسب المؤلفة

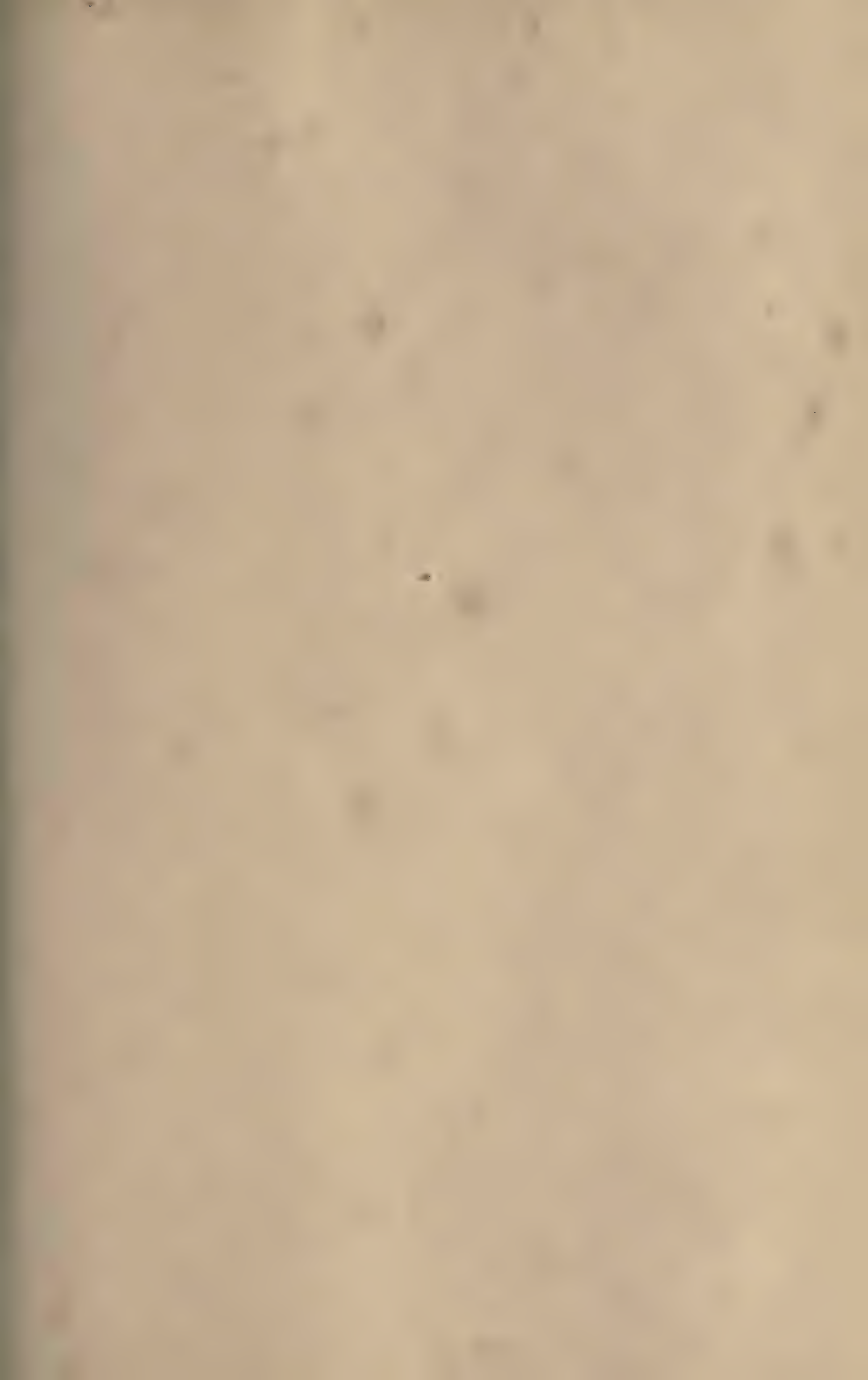
عبدالله عبدالكافى بن عبدالمجيد بن عبيدالله

ABDULLAH-ABDUL-KIAFI-BN-ABDUL-MEDJID-IBN-OBEIDULLAH.

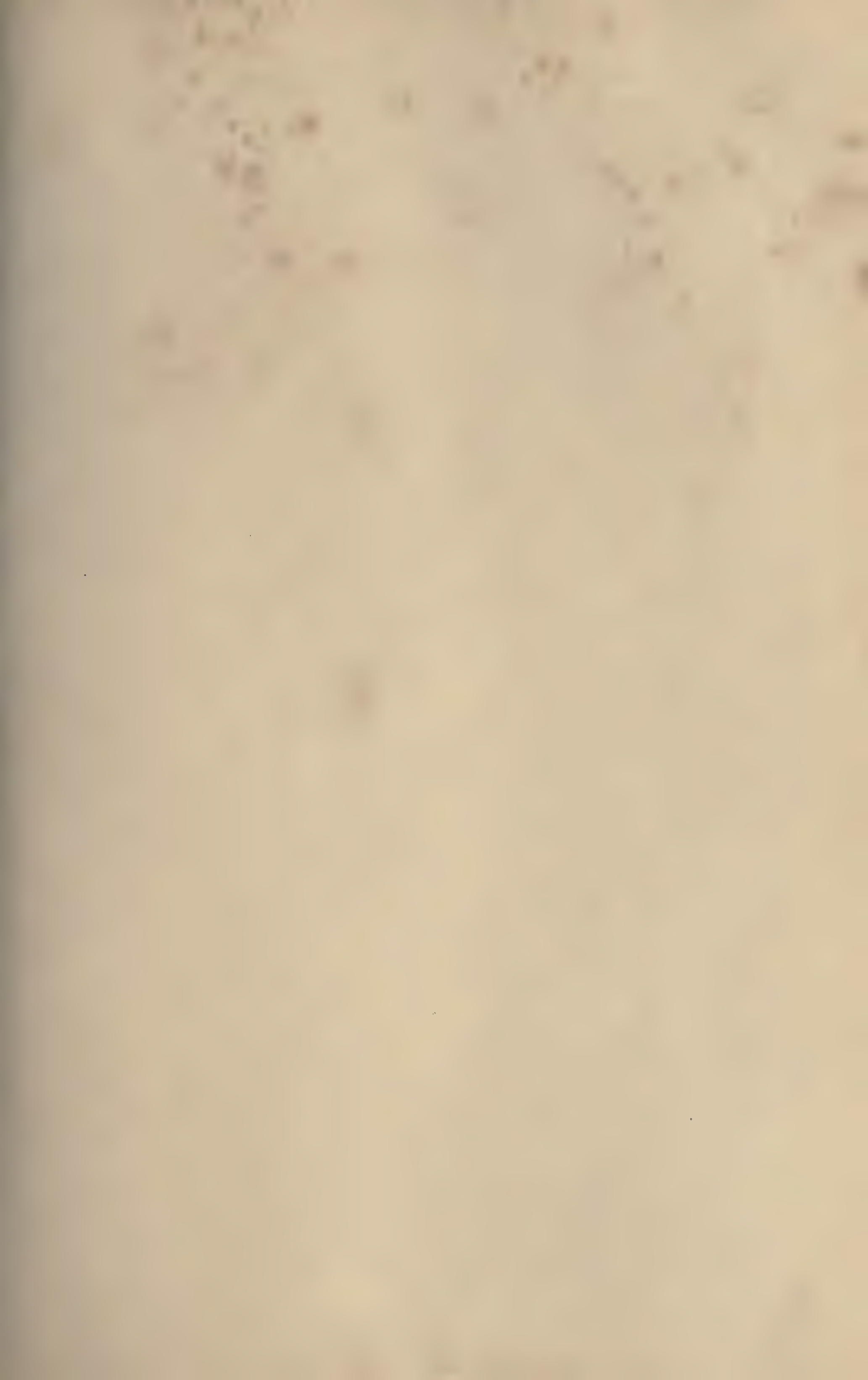
L'auteur de la copie du manuscrit et qui semble se donner pour un des disciples de Nasiruddin.

Sur Nasiruddin. Hadji Khalfa N° 6800. --

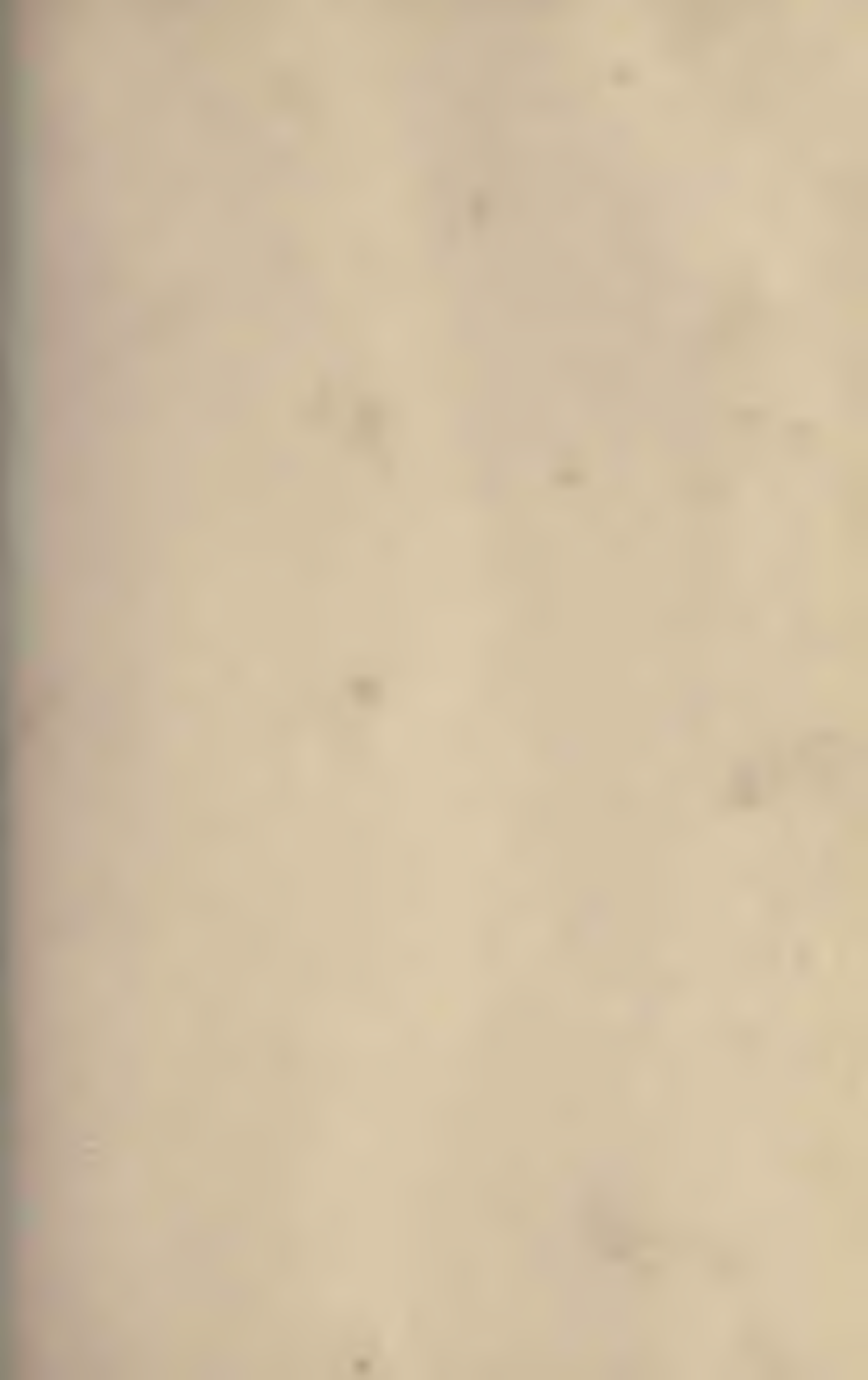












بما تقدم وذلك بانا نخرج من نقط ا ب ى اعمدة الى سطح دائرة حه وهى اعمدة ار بح ىط وجعلنا عمود طى وسطا فى النسبة بين الآخرين فتكون نسبة عمود ار الى عمود بح اعنى نسبة جيب اه الى جيب هب مؤلفة من نسبة عمود ار الى عمود ىط اعنى من نسبة جيب او الى جيب وى ومن نسبة عمود ىط الى عمود بح اعنى من نسبة جيب حى الى جيب حب وذلك ما اردناه وعلى هذا القياس فى سائر براهينه والله اعلم نقل من خط المصنف رحمة الله عليه

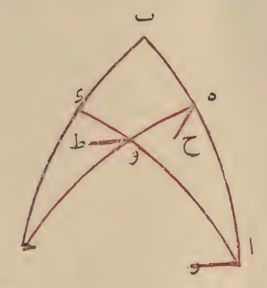
مم

م

الى عمود رل و بمثله نبين ان كان احد القوسين من جهة حَ او الى جهة وَ وذلك ما اردناه واذبينا هذه المقدمة فليقطع فيما بين قوسى اب بح قوسى اح حه على وَ

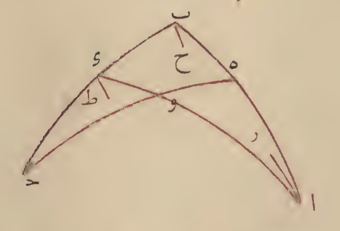
اقول فنسبة جيب اب الى جيب به مؤلفة من نسبة جيب اى الى ىو ومن نسبة جيب حو الى جيب حه

برهانه نخرج من نقط ا هَ وَ اعمدة ار هح وط على سطح دائرة بح ونجعل عمود وط وسطا فى النسبة بين عمودى ار هح وتكون نسبة ار



الى هح مؤلفة من نسبة ار الى وط ومن نسبة وط الى هح اما نسبة عمود ار الى عمود هح فكنسبة جيب با الى جيب به واما نسبة عمود ار الى عمود وح فكنسبة جيب با الى جيب به واما نسبة عمود ار الى عمود هح فكنسبة جيب با الى جيب به واما نسبة عمود ار الى عمود وط فكنسبة جيب ىا الى جيب ىو واما نسبة عمود وط الى عمود هح فكنسبة جيب حو الى جيب حه فاذن النسبة بين الجيوب كما ادعينا

وعلى جهة التفصيل نسبة جيب اه الى جيب هب مؤلفة من نسبة جيب او

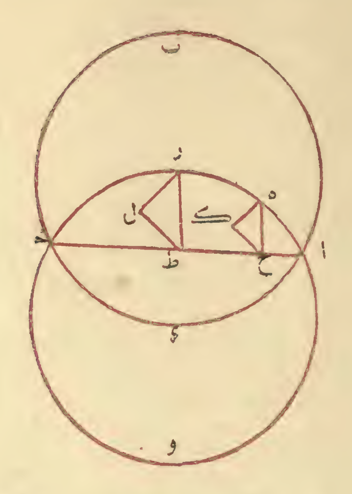


الى جيب وى ومن نسبة جيب ىح الى جيب حب والمسلك فى برهانه شبيه



من مقالة لثابت بن قرة فى الشكل القطاع والنسبة المؤلفة

فان اطلق لنا ان نأتى ببرهان لما اراد بطلميوس ان يبرهنه من الشكل القطاع من حيث شاء فقد استخرجناله برهانا اقرب واشمل من برهان بطلميوس لا تحوج براهينه له ولا الى شى من الاربع المقدمات التى قدمها من اجله ويعم جميع اقسامه فى باب واحد على جهة التركيب و باب على جهة التفصيل فقط ونقدم لذلك اولا هذه المقدمة دائرتا ا ب ح ى ا ه ح و من العظام التى فى الكرة وقد تقاطعا على ا ح وفصل من دائرة ا ه ح و قوسان كل واحدة منهما اقل من نصف دائرة وهما ا ه ا ز واخرج من نقطتى ه ز عمودان على سطح دائرة ا ب ح ى

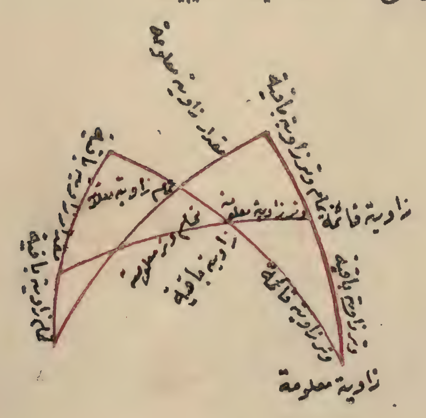


فاقول ان نسبة جيب قوس ا ه الى جيب قوس ا ز كنسبة العمود الخارج من ه الى العمود الخارج من ز برهانه ان الفصل المشترك للدائرتين قطرهما ونخرج من نقطتى ه ز عمودين على ا ح وهما ه ح ز ط فاما كانا عمودين ايضا على سطح دائرة ا ب ح ى فقد تبين ما اردنا لانهما جيبا قوس ا ه ا ز وان لم يكونا كذلك اخرجنا من نقطتى ه ز عمودين على سطح دائرة ا ب ح ى وهما ه ك ز ل فيكونان متوازيين و ه ح ز ط ايضا متوازيان فزاويتا ح ه ك ط ز ل متساويتان وزاويتا ه ح ك ز ط ل قائمتان فمثلثا ه ح ك ز ط ل متشابهان فنسبة ه ح الى ز ط اعنى نسبة جيب ا ه الى جيب ا ز كنسبة عمود ه ك

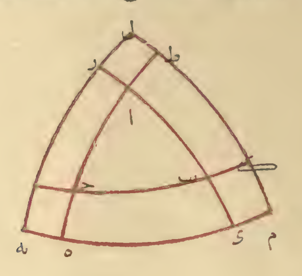
وقوعها فى اكثر الصناعة ومن عرف مامهدنا الى ههنا لم يتعذر عليه تجريد الاعمال من البراهين ولما تبين لنا الطريق الى تعرف مقادير الاضلاع والزوايا من المثلثات القائمة الزاوية والحادة الزوايا والمنفرجة الزاوية الحادثة عن تقاطع القسى العظام فى سطح الدائرة وقدبينا ان العلم بذلك يستلزم العلم بمقادير الاضلاع والزوايا من المثلثات السبعة التى تحدث مع كل مثلث فى سطح الكرة فقد تبين لنا كيفية التوصل من المجهولات الى المعلومات فى جميع المثلثات الحادثة من القسى العظام فى سطح الكرة على الاطلاق ولاح مما مر كيفية رجوع هذه القوانين الى الشكل القطاع فان الحاجة فى كل مثلث تغير بعض زواياه الى تخيل قطاع يكون بعض اركانه ارباعا ضرورة الا ان النسب تغير فى القطاع من حيث هى مؤلفة وههنا من حيث هى بسيطة وهذا هو الغرض من الحاقنا هذه المقالة بالاربع الاول ولنقطع الكلام ههنا حامدين لله على الآئه ومصلين على خاتم انبيائه والله اعلم بالصواب واليه المرجع والمآب

م

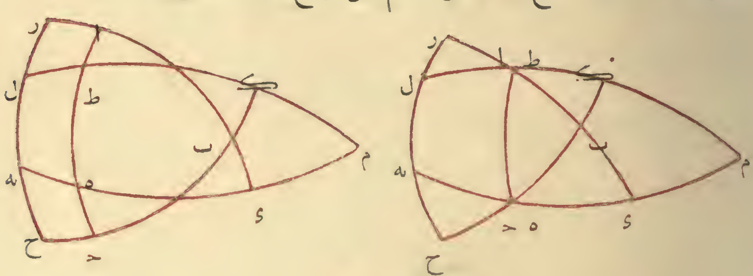
فرغ المصنف رحمة الله عليه من تأليف هذا الكتاب فى الحادى والعشرين من جمادى الاولى سنة ثمان وخمسين وستمائة وصاحبه من كتبه عبدالله الفقير اليه عبد الكافى بن عبد المجيد بن عبيد الله يوم الخميس الخامس عشر من جمادى الآخرة سنة سبع وسبعين وستمائة بقرية شيروان من قرى زنكيباباذ حامدا الله تعالى ومصليا على المؤيدين بالقوة الآلهية والانفس القدسية خصوصا على اشرف خلقه محمد وعلى آله الطاهرين الطيبين



ب ح ربعين و حـ ا حـ ب الى ان يصير حـ ك حـ ط ربعين ونرسم قسى ى ه ر ح ط ك من العظام وليتلاق عند نقط ل م ه فيحدث مثلث ل م ه من القسى العظام فلكون زوايا ا ب حـ الثلث معلومة تكون قسى ى ه ر ح ط ك الثلث معلومة ولكون زاويتى ك ح قائمتين يكون ل قطبا لقوسى ك ح



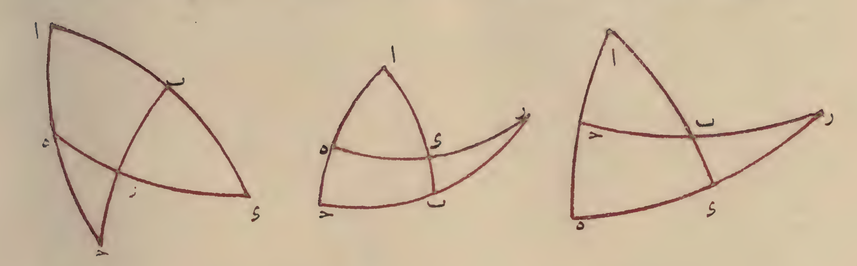
ولمثله يكون م قطبا لط ه و ه قطبا لى ر فتكون كل واحدة من قوسى ط ل ك م تماما لقوس ط ك فيكون ل م معلوما وكذلك القول فى ل ه م ه فاضلاع مثلث ل م ه الثلثة معلومة وتصير بحكم الضرب الخامس من هذه الضروب زواياه معلومة فتكون قسى ك ح ى ر ه ط معلومة ولكون كل واحدة من قوسى ك حـ ب ح ربعا يكون تمام ك ح من نصف الدور المعلوم مساويا لب حـ فب حـ معلوم وكذلك ا ب و ا حـ فاذن اضلاع مثلث ا ب حـ معلومة فان كان ضلع ربعا او اعظم من الربع كان الشكل هكذا



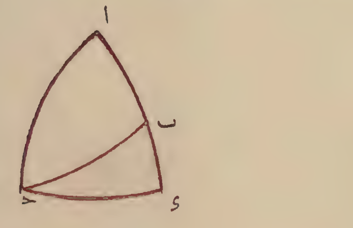
والبيان معلوم تمامة وقس على ذلك سائر الاختلافات الممكنة واستخراج المجهولات من المعلومات فى هذين الضربين اعنى الخامس والسادس بقانون الشكل الظلى ان كان ممكنا وانا لااعرفه وان سنح لى معرفته الحقته بهذه الرسالة وما ذكرت مؤامرة الاعمال فى الضروب الستة الاخيرة مخافة من التطويل ولقلة

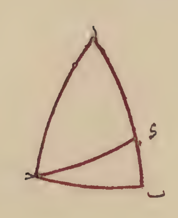
الربع ويتم لافى الضلع الثالث فيتم القطاع ونبين المطلوب فيه ونحن لم نورد اختلافات الوقوع لوضوحها تمامر

الضرب الخامس وليكن المعلوم جميع الاضلاع دون الزوايا والمثلث ا ب ح فلنجعل ا ب ا ح عند نقطتى ى ه ربعين ونخرج ى ه وتمم القطاع ونقول لما كان ا ب ا ح معلومين يكون ب ى ح ه معلومين وهما ميلا قوسى ر ب ر ح لكون زاويتى ى ه قائمتين فتكون نسبة نسبتهما كنسبة جيبى قوسيهما وهما ر ب ر ح فهى معلوم و ب ح معلوم فيكون بمثل مامر فى المقالة الثالثة كل واحدة



من قوسى ر ح ر ب معلومين ويصير فى مثلثى ر ب ى ر ح ه القائمى الزاوية ضلعان معلومين فيصير قوسا ر ى ر ه معلومين وتصير ى ه اعنى زاوية ا معلومة وكذلك فى الزاويتين الباقيتين فان كان احد الضلعين ربعا وليكن ا ح جعلنا ا ب ايضا ربعا ونرسم قوس ى ح فلكون ا ى معلومة و ا ب ربعا يكون ب ى معلوما وفى مثلث ب ى ح ضلعا ب ى ب ح معلومين ويصير فى مثلث ا ى ح ضلعا ى ح ا ح معلومين وتصير زوايا مثلث ا ب ح معلومة





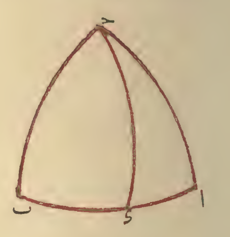
الضرب السادس وليكن المعلوم جميع الزوايا دون الاضلاع والمثلث ا ب ح ونخرج ا ب ا ح الى ان يصير ا ى ا ه ربعين و ا ب ب ح الى ان يصير ب ر

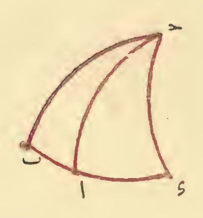
الى جيب زاوية ب كنسبة جيب ضلع ب ح الى ضلع ا ح ضلع ا ح





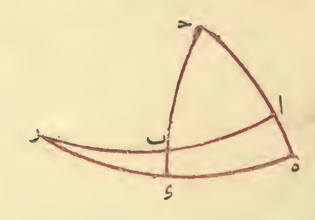
معلوما وعلى الوجه العام نخرج من ح قوس ح د القائمة على ا ب فى مثلث ح ب د من معرفة ب ح وزاوية ب كما بين فى الضروب المذكورة وفى مثلث





ا ح د من معرفة زاوية ا وضلع د ح كما بين فى الضرب الثالث باقى الاضلاع والزوايا معلومة فتصير المطالب حاصلة كما مر

وبوجه آخر نخرج ح ا ح ب الى ان يصيرا عند د ه ربعين ونتمم قطاع ه ح د ب ونتعرف ضلع ا ح بمثل ما مر ثم زاوية ح وضلع ا ب كما بين فى الضرب الثانى من هذه الضروب فلا نطول الكلام باعادته وفى هذه

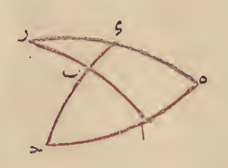


القطاعات ان كان الضلعان اللذان نخرجهما الى الربع او احدهما اعظم من الربع نفصل مما هو اعظم من الربع ربعا ونرسم قوسا تمر بالطرفين الذين عندهما يتم

الضرب الثالث وليكن المعلوم زاويتين وضلعا بينهما كزاويتى ب ح وضلع ب ح من مثلث ا ب ح ونرسم قوسا من العظام تمر باحدى الزاويتين المعلومتين وتقوم على وترها ويكون على صورة الشكل المتقدم فلتكن قوس ب ء ويكون فى مثلث ب ء ح ضلع ب ح وزاوية ح معلومتين وزاوية ء قائمة فتصير باقى الاضلاع والزاويا معلومة كما مر فى الضرب الخامس ففى مثلث ا ب ح تصير زاوية ا وضلعا ا ب ا ح بالوجهين معلومة والشكل كما مر فى الضربين الذين قبل هذا الضرب

وبوجه آخر نخرج ضلعى ح ب ح ا الى ان يتم ربعا ح ء ح ه ونتم قطاع ه ح ر ب ففى مثلث ب ر ء تكون زاوية ب وضلع ب ء معلومين وتصير باقى الاضلاع والزوايا معلومة ولكون ء ه معلوما اعنى زاوية ح يصير فى مثلث ر ه ا ضلع ر ه وزاوية ر معلومين فتصير باقى الاضلاع والزوايا معلومة وفى مثلث ا ب ح تصير زاوية ء وضلع ا ب وضلع ا ح معلومة كما مر البيان مرارا



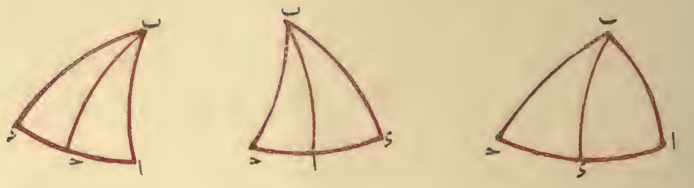


وبوجه آخر نرسم قوسا تمر باً وتقوم على ب ح فبالظلى تكون نسبة ظل زاوية ب الى ظل زاوية ح المعلومين كنسبة جيب قوس ح ء الى جيب قوس ب ء فهى معلومة وقوس ب ح معلومة فتصير كل واحدة من قوس ب ء ح ء معلوما لما مر فى المقالة الثالثة وتصير فى مثلث ا ب ء من معرفة ضلعى ا ب ب ء وفى مثلث ا ء ح من ضلع ء ح وزاوية ح باقى الاضلاع والزوايا ومنها باقى المطالب معلوما

الضرب الرابع وليكن المعلوم زاويتين وضلعا ليس بينهما كزاويتى ا ب وضلع ب ح فى مثلث ا ب ح فيصير بحكم المغنى من كون نسبة جيب زاوية ا

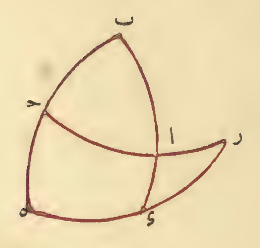
باقى اضلاعه وزواياه معلومة كما مر فى الضرب الرابع وفى مثلث ب ى ح يصير





ضلعى ب ء ب ء معلومين ومنهما تصير باقى الاضلاع والزاويا معلومة كما مر فى الضرب الاول من الضروب المذكورة فيصير فى مثلث ا ب ح ضلع ا ح وزاويتا ب ح بالوجهين معلومة

وبوجه آخر نخرج ب ا ب ج الى ان يتم ربعى ب ه ب ء ونتمم قطاع ب ه ر ا فيكون فى مثلث ر ا ء زاوية ا وضلع ا ء الذى هو تمام ب ا معلومين

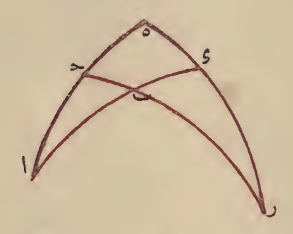


وتصير باقى الاضلاع والزوايا معلومة لما مر فى الضرب الرابع ولكون ا ء ح ه مثلى ر ا ر ح وعرضى ر ء ر ه يصير قوسا ر ح ر ه بالقانونين معلومين فيصير ضلع ا ح الباقى من ر ح بقدر ا المعلوم وزاوية ب التى هى بقدر ء ه معلومين ثم تصير زاوية ح ايضا معلومة بمثل مامر وان اردنا اخرجنا من نسبة جيب ا ء الى جيب ح ه المعلومة التى هى كنسبة جيب ر ا الى جيب ر ح ومن نسبة ظل ا ء الى ظل ح ه المعلومة التى هى كنسبة جيب ر ء الى جيب ر ه ومن قوس ر ا ر ء المعلومتين كل واحدة من قوس ر ح ر ه يبقى ضلع ا ح قوس ء ه التى بقدر زاوية ب معلومين

من الضروب المذكورة وفى مثلث ر ى ب يكون ضلع ر ب الذى هو مجموع ر ا ا ب المعلومين وزاوية رَ معلومين وزاوية ىَ قائمة فتصير باقى الاضلاع والزوايا معلومة كما مر فى الضرب الرابع بالوجهين

وايضا بالمغنى لكون نسبة جيب رَ اَ الى جيب ا ه كنسبة جيب ر ب الى جيب ب ى معلومة فبالجملة تصير ح ب تمام ب ى معلومة ومن معرفة زاوية ر ب ى تصير زاوية ا ب ح معلومة ومن معرفة ه ى تصير زاوية حَ معلومة

وبوجه آخر نخرج ضلعى ا ب ا ح الى ان يتم ربعى ا ى ا ه ويتم قطاع ه ر ا ب فلكون ب ى ح ه تمامى ا ب ا ح معلومين وبحكم الشكل الظلى نسبة ظليهما كنسبة جيبى ر ى ر ه فنسبة جيب ر ى الى جيب ر ه تكون معلومة وقدر ى ه الذى هو قدر زاوية اَ معلومة نعلى ماتبين فى المقالة الثالثة تصير كل واحدة



من قوسى ر ى ر ه معلومة فيكون فى مثلث ر ب ى ضلعا ى ر ى ب معلومين وزاوية ىَ قائمة فتصير زاوية بَ معلومة وضلع ر ب معلوما وفى مثلث ر ح ه ضلعا ر ه ه ح معلومان وزاوية هَ قائمة فتصير زاوية حَ معلومة وضلع ر ح معلوما ويبقى ب ح معلوما

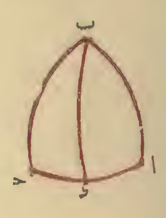
الضرب الثانى وليكن المعلوم فيه ضلعين وزاوية ليست بينهما كضلعى ا ب ب ح وزاوية اَ من مثلث ا ب ح فبالشكل المغنى لكون نسبة جيب كل زاوية الى جيب اخرى كنسبة جيب وتر الاول الى جيب وتر الاخرى تصير زاوية حَ معلومة وعلى الوجه العام نرسم قوس ب ى القائمة على ضلع ا ح فيكون فى مثلث ا ب ى ضلع ا ب وزاوية اَ معلومين وزاوية ىَ قائمة فتصير

المعلومين او تكون وترا لاحدٰيهما فاذن ضروب هذه المثلثات ايضا تصير ستة

الضرب الاول وليكن المعلوم فيه ضلعين وزاوية بينهما كضلعى اب اح







وزاوية آ من مثلث ابح ولنرسم قوسا من عظيمة يمر باحدى الزاويتين

المجهولتين وبقطب وترها ولتكن هى بى فتكون زوايا ى قائمة وتقع ى

داخل المثلث فى حادالزوايا وفى منفرج الزاوية الذى يكون ب فيه منفرجة

وخارجة فى منفرج الزاوية الذى يكون منفرجيه احدى زاويتى آ ح فيقع



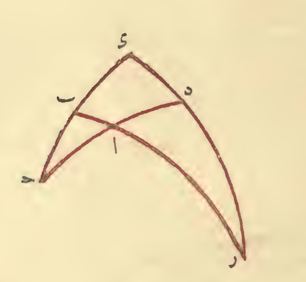
فى جهة المنفرجة ويكون فى مثلث ابى ضلع اب وزاوية آ معلومين

فيصير باقى اضلاعه وزواياه معلومة كما مر فى الضرب الرابع من المثلثات القائمة

الزاوية فيكون فى مثلث بىح ضلعا بى ىح معلومين وتصير باقى اضلاعه

وزواياه معلومة كما مر فى الضرب الثانى منها فتصير زاويتا ب ح وضلع بح

بحكم الشكلين اعنى المغنى والظلى معلومة



وجه أخرى نخرج ضلعى حا حب الى ان يصير حه حى ربعين تامين

ونخرج ىه الى ان يلقى بى على ر ويتم قطاع ذرحا ففى مثلث اره

تكون زاوية آ وضلع اه تمام ضلع اح معلومين وزاوية ه قائمة فتصير

باقى اضلاعه وزواياه معلومة بالوجهين على مابين فى الضرب الخامس

جيب ضلع اب ظل بح يحصل من قسمة ظل تمام زاوية ا على جيب اب ظل تمام بح ومن قسمة جيب ضلع اب على ظل تمام زاوية ا ظل بح

وايضا ان كان المعلوم ضلع بح وزاوية ا والمطلوب ضلع اب فكما يحصل من قسمة ظل بح على ظل زاوية ا جيب ضلع اب يحصل من ضرب ظل بح فى ظل تمام زاوية ا اومن قسمة ظل تمام زاوية ا على ظل تمام بح او نضرب ظل تمام بح فى ظل زاوية ا او نقسم ظل تمام بح على ظل تمام زاوية ا وقسمة الواحد على خارج القسمة ذلك وللفرع الاول كما يحصل من ضرب جيب تمام زاوية ا فى ظل تمام اب ظل تمام اح يحصل من قسمة جيب تمام زاوية ا على ظل اب ذلك او من قسمة ظل اب الى جيب تمام زاوية ا ظل اح وكما يحصل من قسمة ظل تمام اب جيب تمام زاوية ا يحصل من قسمة ظل اب على ظل اح اومن ضرب اب فى ظل تمام اح او من جيب ظل اح فى ظل تمام اب او من قسمة ظل اح على ظل اب اح على ظل تمام وقسمة الواحد على خارج القسمة ذلك وللفرع الثانى كما يحصل من ضرب ظل زاوية ا فى جيب تمام اح ظل تمام زاوية ح يحصل من قسمة جيب تمام اح على ظل تمام زاوية ا ذلك ومن قسمة ظل تمام زاوية ا على جيب تمام اح ظل زاوية ا فظهر من هذا انه كما كان للمغنى فى اطراد الحكم على الظلى فضيلة كان للظلى فى اتساع الاعمال عليه ايضا فضيلة من وجه آخر وهذا تمام الكلام فى المثلثات القائمة الزاوية ولنتكلم على سائر المثلثات كلاما اوجز فان الحاجة اليها اقل

الكلام فى سائر المثلثات

اما المثلثات الحادة الزوايا والمنفرجة الزاوية فيجب ان يكون فى كل واحد منها ثلثة معلومات حتى يمكن ان يعرف بها معلوم آخر بطريق النسبة كما ذكرنا فيما تقدم والمعلومات الثلثة اما ان تكون ضلعين وزاوية او زوايتين وضلعا او الاضلاع الثلثة اوالزوايا الثلث وهذه ضروب اربعة لكن الاول والثانى ينقسمان الى قسمين فان فى الاول الزاوية المعلومة اما ان تكون بين الضلعين

الضرب الرابع والمعلوم فيه زاوية غير القائمة ووتر القائمة فللفرع الاول نضرب ظل تمام وتر القائمة فى نصف القطر ونقسمه على جيب تمام الزاوية المعلومة فاحصل فهو ظل تمام الضلع الواقع بين الزاوية المعلومة والقائمة ويعرف باقى المجهولات بمثل مامر فى الضرب الاول

الضرب الخامس والمعلوم فيه زاوية غير القائمة وضلع يقع بينهما فلا صل الظلى نضرب ظل تلك الزاوية فى جيب ذلك الضلع ونقسمه على نصف القطر فاحصل فهو ظل وتر تلك الزاوية وتعرف باقى المطالب بمثل مامر فى الضرب الثانى او الثالث

الضرب السادس والمعلوم فيه الزوايا كلها فللفرع الثانى نضرب ظل تمام احدى الزاويتين فى نصف القطر ونقسمه على ظل الزاوية الاخرى فاحصل فهو جيب وتر القائمة وتعرف باقى المطالب بمثل مامر فى الضرب الرابع

واعلم ان الغرض من ايراد هذه المؤامرات ليس هو حصر طرق استخراج المجهولات بل الغرض هو بيان ان استخراج كل واحد من المجهولات فى المثلثات القائمة الزاوية التى عليه بناء معظم الصناعة بكل واحد من الشكلين ممكن فان استخراج المؤامرات من البراهين على الفطن الواقف على اصولها اسهل من حفظها وضبطها بالتقليد واذا روعى ماذكر من خواص الظل فى الطرق المخصوصة بالشكل الظلى صارت المؤامرات فى استخراج مطلوب واحد ببرهان



واحد كثيرة مثاله نرسم مثلث $\overline{\text{ا ب ح}}$ القوسى القائم الزاوية فبحكم اصل الظلى ان كان ضلع $\overline{\text{ا ب}}$ وزاوية $\bar{\text{ا}}$ معلومين وزاوية $\bar{\text{ب}}$ قائمة وجعلنا نصف القطر واحدا واردنا ان نعرف ضلع $\overline{\text{ب ح}}$ فكما يحصل من ضرب ظل زاوية $\bar{\text{ا}}$ فى

الضرب السادس وليكن المعلوم الزاويتين غيرى القائمة فللفرع الثانى نضرب جيب تمام احدى الزاويتين فى نصف القطر ونقسمه على جيب الزاوية الاخرى فما حصل فهو جيب تمام وتر الزاوية الاولى ويعرف الضلعين الباقيين بمثل مامر فى الضرب الثالث

﴿ واما على قانون الظلى ﴾

فالضرب الاول والمعلوم فيه ضلعان احدهما وتر القائمة فللفرع الاول للظل تضرب ظل تمام وتر القائمة فى نصف القطر ونقسمه على ظل تمام الضلع الآخر فما حصل فهو جيب تمام الزاوية الواقعة بين الضلعين المعلومين ولاصل الظلى يضرب ظل هذه الزاوية التى صارت معلومة فى جيب الضلع الواقع بينهاوبين القائمة ونقسمه على نصف القطر فما حصل فهو وتر ظل تلك الزاوية وللفرع الثانى نضرب الظل الزاوية المعلومة فى جيب تمام وتر القائمة ونقسمه على نصف القطر فيحصل ظل الزاوية الباقية او للفرع الاول نضرب ظل تمام وتر القائمة فى نصف القطر ونقسمه على ظل تمام الضلع الواقع بين الزاوية المجهولة والقائمة فما حصل فهو جيب تمام الزاوية المجهولة

الضرب الثانى والمعلوم فيه ضلعا القائمة فلاصل الظلى نضرب ظل احد هما فى نصف القطر ونقسمه على جيب الضلع الآخر فما حصل فهو ظل الزاوية الموترة بالضلع الاول وبمثل ذلك نعرف الزاوية الاخرى واما المعرفة وتر القائمة فللفرع الاول يضرب جيب تمام احدى الزاويتين فى ظل تمام الضلع الواقع بينها وبين القائمة ونقسمه على نصف القطر فما حصل فهو ظل تمام وتر القائمة او للفرع الثانى نضرب ظل تمام احدى الزاويتين فى نصف القطر ونقسمه على ظل الزاوية الاخرى فما حصل فهو جيب تمام وتر القائمة



الضرب الثالث والمعلوم فيه زاوية غير القائمة ووترها فلاصل الظلى نضرب ظل الضلع المعلوم فى نصف القطر ونقسمه على ظل تلك الزاوية فما حصل فهو جيب الضلع الواقع بين الزاوية المعلومة والقائمة ويعرف باقى المجهولات بمثل مامر فى الضرب الثانى

يكون من الشكل المغنى او من الشكل الظلى ونحن نوردها جميعا ونقتصر على مؤامرات الاعمال مجردة عن البراهين فان البراهين قد تبين فيما مر

استخراج المجهولات من المعلومات فى المثلثات القائمة الزاوية على قانون المغنى

الضرب الاول وليكن المعلوم وتر القائمة وضلعا آخر ولما ظهر فى الفرع الاول للمغنى نضرب جيب تمام وتر القائمة فى نصف القطر ونقسمه على جيب تمام الضلع المعلوم حتى يحصل جيب تمام الضلع المجهول وللزوايا المجهولة نضرب بحكم اصل المغنى جيب وتر الزاوية المجهولة فى نصف القطر ونقسمه على جيب وتر الزاوية القائمة فما حصل فهو جيب الزاوية المجهولة

الضرب الثانى وليكن المعلوم المحيطين بالقائمة فبحكم الفرع الاول يضرب جيب تمام احدهما فى جيب تمام الآخر ونقسمه على نصف القطر يحصل جيب تمام وتر القائمة ونستخرج الزوايا من الاضلاع كما مر فى ضرب الاول بعينه

الضرب الثالث وليكن المعلوم زاوية غير القائمة ووترها فلاصل المغنى يضرب جيب الضلع المعلوم فى نصف القطر ويقسم الحاصل على جيب الزاوية المعلومة فما يحصل فهو جيب وتر القائمة ويتعرف بمثل مامر فى الضرب الاول الضلع والزاوية الباقيين

الضرب الرابع وليكن المعلوم زاوية غير القائمة ووتر القائمة فلاصل المغنى يضرب جيب الزاوية المعلومة فى جيب وتر القائمة ونقسم الحاصل على نصف القطر فيحصل جيب وتر الزوايا المعلومة ويعرف الضلع والزاوية الباقيين بمثل مامر فى الضرب الاول

الضرب الخامس وليكن المعلوم زاوية غير القائمة والضلع الذى بينها وبين القائمة فللفرع الثانى يضرب جيب الزاوية المعلومة فى جيب تمام الضلع المعلوم ونقسمه على نصف القطر فما حصل فهو جيب تمام الزاوية الموترة بالضلع المعلوم ويعرف الضلعين الباقيين بمثل مامر فى الضرب الثالث

واما الصورة الرابعة وهى ان يكون المطلوب من قسمة جيب على ظل ظلا فان كان المقسوم عليه اعظم من نصف القطر ضربنا الجيب فى ظل تمام قوس المقسوم عليه فما حصل فهو الظل المطلوب

واما الصورة الخامسة وهى ان يكون المطلوب من قسمة ظل على جيب ظلا فان كان المقسوم اعظم من نصف القطر قسمنا ظل تمام قوس المقسوم على الجيب فما حصل فهو ظل تمام قوس المطلوب وذلك لما بينا ان الخارج من قسمة ظل قوس والخارج من قسمته ظل تمامها على مقدار واحد ظلا قوسين احديهما تمام الاخرى وهذه القوانين مختصة بمقادير اربعة يكون احدهما نصف القطر فان لم يكن كذلك وكانت جيبين وظلين كيف اتفق زاد فى العمل ضرب او قسمة والوجه فيه على قياس ما تقدم ظاهر فاذن قد ظهر ان العمل فى جميع الابواب مع الاقتصار على معرفة القسى التى هى اقل من ا ثمن من اظلالها التى هى اقل من نصف القطر وبالعكس ممكن وزال به القدح الواقع فى الاوهام العامية فى هذا الشكل بسببه

الفصل السابع

فى تمام الكلام فى كيفية التوصل من المعلومات الى المجهولات فى المثلثات القوسية

قد مرّ فى الفصل الرابع ان النسب البسيطة تشتمل على اربعة حدود ولا بد فى التوصل من المعلومات الى المجهولات بطريق النسبة من العلم بثلثة منها حتى يتوصل منها الى الرابع المجهول وكل مثلث مشتمل على ثلثة اضلاع وثلاث زاويا فاذن مالم يكن ثلثة اشياء من هذه الستة فى كل مثلث معلوما لم يمكن ان يعرف باقيها اما المثلثات القائمة الزاوية ففيها احدى الزوايا اعنى القائمة معلومة ابداً ويكفى فى تعرف مجهولاتها معلومان غير القائمة فذانك المعلومان اما ان يكونا ضلعين او ضلعا وزاوية او زاويتين فان كانا ضلعين فاما ان يكونا المحيطين بالقائمة او يكون احدهما وترها وان كانا ضلعا وزاوية فاما ان يكون الضلع وتر القائمة او وتر المعلومة او الضلع الباقى وهذه ستة ضروب والقانون فى كل ضرب اما ان

ولا يمكن ان يكون الظلان كلاهما اعظم من نصف القطر لان نسبة الواحد الى احدهما تكون كنسبة الآخر الى الجيب المطلوب فان كان احد الظلين اعظم من الواحد كان الجيب المطلوب اعظم من الظل الآخر ولا يكون جيب اعظم من نصف القطر فاذن الظل الآخر يكون اصغر من نصف القطر فاذن اما ان يكون الظلان كلاهما اصغر من نصف القطر او يكون احدهما اعظم والآخر اصغر اما الاول فالكلام فيه ههنا واما الثانى فاذا قسمنا الظل الذى هو اصغر من نصف القطر على ظل تمام القوس التى ظلها اعظم من نصف القطر كان الحاصل هو الذى يحصل من ضرب احد ذينك الظلين فى الآخر على ما تبين فى صدر الفصل وان وقع فى غير هذه الصور ظلان كلاهما اعظم من نصف القطر فاردنا ضرب احدهما فى الآخر حتى يحصل ظل آخر ضربنا ظل تمام المضروب فى ظل تمام المضروب فيه فما يحصل فهو ظل تمام القوس المطلوبة على ما تبين

واما الصورة الثانية وهى ان يكون المطلوب من قسمة ظل على ظل جيبا وفى هذه الصورة يكون المقسوم اقل من المقسوم عليه لان الخارج من القسمة يجب ان يكون اصغر من الواحد فالظلان ان كانا اعظم من نصف القطر قسمنا ظل تمام قوس المقسوم عليه على ظل تمام قوس المقسوم فما حصل فهو الجيب المطلوب وذلك لان نسبة الظل الى الظل كنسبة ظلى تمامى قوسيهما على التكافى كما مر وان كان احدهما اعظم والآخر اصغر فان كان المقسوم عليه اعظم ضربنا المقسوم فى ظل تمام قوس المقسوم عليه فما خرج فهو الجيب المطلوب و بالعكس محال لما مر

واما الصورة الثالثة وهو ان يكون المطلوب من ضرب جيب فى ظل ظلا فان كان الظل المضروب فيه اعظم من نصف القطر قسمنا الجيب على ظل تمام قوسه فما حصل فهو الظل المطلوب فان كان اعظم من نصف القطر قسمنا الواحد عليه فما حصل فهو ظل تمام قوس المطلوب فيمكن ان نقوس فى الجدول الاول من الثمن وهكذا فى كل ظل يكون اعظم من نصف القطر واردنا معرفة قوسه من الجدول واما ان كان الظل المضروب فيه من نصف القطر كان الظل المطلوب ايضا اصغر كما مر

و ىه تمام هر و هر عرض ه ح واعظمه بحسب زاوية ح و ه ح تمام ح ا فزاوية ا بقدر تمام عرض تمام ا ح من العرض الذى يكون اعظمه بقدر زاوية ح وايضاً وتر ح ا تمام ح ه وهى عرض قوس ر ه و ر ه تمام زاوية ا فا ح تمام قوس عرضه تمام زاوية ا من العرض الذى اعظمه بقدر زاوية ح وحكم هذا الفرع حكم نظيره فى المغنى

﴿ خاتمة هذا الفصل ﴾

اعلم ان جماعة من الافاضل طعنوا فى هذا الشكل بسبب فرط تزايد اظلال قسى تزيد على ثمن الدور وتزيد تلك الاظلال ضرورة على نصف القطر لان ظل ثمن الدور يساوى نصف القطر واذا وضعت الاظلال فى جداول تتزايد قسيها بمقادير متساوية صارت مقادير مابين سطورها من الاظلال بعد الثمن متزايدة تزايدا فاحشا ولذلك لم يبق ثقة باخذ الاظلال فيها بتعديل مابين السطرين المعهود فى سائر الجداول واذا انصفنا من انفسنا لم يجب ان نحكم بالقدح فى هذا الشكل من هذه الجهة لان اخذ الاظلال ليس بواجب ان يكون من الجداول ومع هذا قلنا ان يعمل بهذا الشكل فى جميع الاظلال مع الاقتصار على معرفة اظلال ثمن الدور فقط فان للاظلال خواص دون الجيوب من جهتيها يقوم البعض منها مقام البعض الآخر وقد ذكرنا طرفا من ذلك فى صدر هذا الفصل والآن نبين كيف يعمل بجميع الاظلال مع الاختصار على معرفة اظلال ماينقص عن ثمن الدور

فنقول قد تبين من هذا الفصل ان المقادير الاربعة المتناسبة الواقعة فى كل صورة من صور هذا الشكل مشتملة على جيبين احدهما الجيب الاعظم فى اكثر الاحوال وعلى ظلين وتعرف المجهول منها انما يكون بضرب وقسمة واذا فرضنا مقدار نصف القطر واحدا والمجهول يكون اما جيبا او ظلا فان كان جيبا فلا شك انه انما يحصل اما من ضرب ظل فى ظل وان كان ظلا فهو انما يحصل اما من ضرب ظل فى جيب او من قسمة ظل على جيب او من قسمة ظل على جيب او من قسمة جيب على ظل وهذه خمس صور

اما الصورة الاولى وهي ان يكون المجهول جيبا و يحصل من ضرب ظل فى ظل

برهانه لما كانت زاوية ه في مثلث ز ح ه في القطاع المذكور قائمة كانت نسبة جيب قوس ح ه الى الجيب الاعظم كنسبة ظل ضلع ه ز الى ظل زاوية ح وقوس ح ه هى تمام ا ح و ه ز هى تمام ه ء التى هى قدر زاوية ا فاذن فى مثلث ا ب ح نسبة جيب تمام ا ح الى الجيب الاعظم كنسبة ظل زاوية ا الى ظل زاوية ح وذلك ما اردناه وعلى هذين الفرعين مدار اكثر المسائل المبنية على فروع هذا الشكل

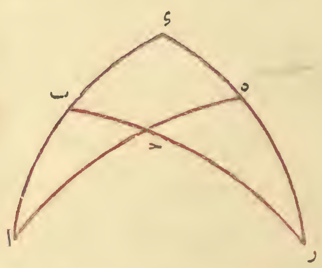
﴿ فرع آخر ﴾

نسبة ظل تمام زاوية غير قائمة الى ظل يقع بينها وبين القائمة كنسبة جيب تمام وتر القائمة الى جيب الضلع الثالث ونعيد الشكل ونقول فى مثلث ا ب ح نسبة ظل تمام زاوية ا الى ظل ا ب كنسبة جيب تمام ا ح الى جيب ب ح لان فى القطاع المذكور نسبة ظل ز ه اعنى تمام زاوية ا الى ظل ا ب كنسبة جيب ه ح اعنى تمام ضلع ا ح الى جيب ب ح وذلك لتساوى زاويتى ح فى المثلثين وكون زاويتى ه ب قائمتين وذلك ما اردناه وهذا الفرع لا يجدى كثيرا لان المجهول به انما يتعرف بثلثة معلومات و يتعرف بغيره بمعلومين

﴿ فرع اخر ﴾

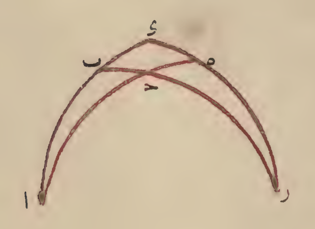
كل زاوية غير قائمة فى مثلث قائم الزاويا تكون بقدر تمام عرض تمام وتر الزاوية القائمة من العرض الذى يكون اعظمه بقدر الزاوية الاخرى غير القائمة وبالعكس وتر الزاوية القائمة فيه يكون بقدر تمام قوس عرضها تمام زاوية غير القائمة من العرض الذى يكون اعظمه بقدر الزاوية الاخرى غير القائمة





ونعيد لبيانه القطاع المذكور فيكون فيه زاوية ا من مثلث ا ب ح بقدر ء ه

جيب قوس ره الى جيب قوس رء كنسبة ظل قوس هحـ الى ظل قوس ءب وقوس ده تمام قوس هء التى هى قدر زاوية آ وقوس رء الربع



وهى قدر القائمة وجيبها الجيب الاعظم وقوس هحـ تمام قوس حـا وقوس ءب هى تمام قوس با فاذن نسبة جيب تمام زاوية آ الى جيب زاوية بَ كنسبة ظل تمام قوس حـا الى ظل تمام قوس با وذلك ما اردناه

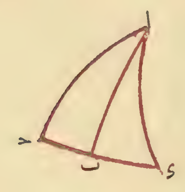
﴿ برهان آخر ﴾

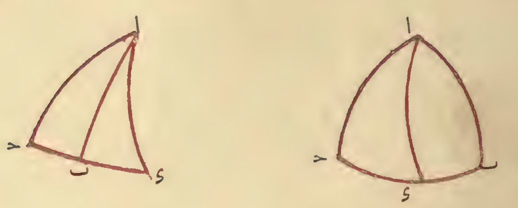
نسبة جيب قوس اب الى جيب قوس بء بالتفصيل فى قطاع ءراحـ التى هى ظل اب مؤلفة من نسبة جيب قوس احـ الى جيب قوس حـه اعنى ظل احـ ومن نسبة جيب قوس هر الى جيب قوس رء الذى هو نصف القطر اعنى جيب تمام زاوية آ فضرب ظل احـ فى جيب تمام زاوية آ كضرب ظل اب فى الواحد وهو بالفرض نصف القطر فاذن نسبة ظل اب الى ظل احـ كنسبة جيب تمام زاوية آ الى نصف القطر وكانت نسبة ظل اب الى ظل احـ كنسبة ظل تمام احـ الى ظل تمام اب فاذن نسبة جيب تمام زاوية آ الى جيب زاوية بَ كنسبة ظل تمام احـ الى ظل تمام اب وذلك ما اردناه

﴿ الفرع الثانى ﴾

نسبة جيب تمام وتر الزاوية القائمة الى جيب الزاوية القائمة كنسبة ظل تمام احدى الزاويتين الباقيتين الى ظل الزاوية الاخرى ونعيد الشكل ونقول فى مثلث ابحـ نسبة جيب تمام احـ وهو وتر زاوية بَ الى الجيب الاعظم وهو جيب زاوية بَ كنسبة ظل تمام زاوية آ الى ظل زاوية حَـ

المذكورة رسمنا قوسا من دائرة عظيمة تمر باحدى زواياها وتقوم على الدائرة التى منها وترتلك الزاوية على قوائم فليكن فى مثلث ا ب ح زاويتا ا ح حادتين وزاوية ب تارة حادة وتارة منفرجة ولتمر با قوسا ا ى القاطعة لقاعدة ب ح عند ى على قوائم ونقول نسبة ظل زاوية ب الى ظل زاوية ح كنسبة جيب قوس ح ى الى جيب قوس ب ى وذلك لان فى مثلث ا ب ى القائم الزاوية نسبة ظل زاوية ب الى ظل قوس ا ى كنسبة الجيب الاعظم الى جيب قوس ب ى وفى مثلث ا ى ح القائم الزاوية نسبة ظل قوس ا ى الى ظل زاوية ح كنسبة جيب قوس





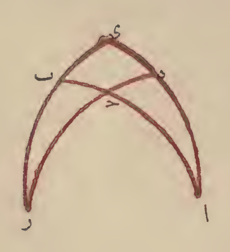
ى ح الى الجيب الاعظم فبالمساواة المضطربة نسبة ظل زاوية ب الى ظل زاوية ح كنسبة جيب قوس ح ى الى جيب قوس ب ى وذلك ما اردناه وايضاً تكون نسبة ظل زاوية ب ا ى الى ظل ب ى كنسبة ظل زاوية ح ا ى الى ظل ح ى لان كل واحدة منهما كنسبة الجيب الاعظم الى جيب ا ى وبالابدال نسبة ظل زاوية ب ا ى الى ظل زاوية ح ا ى كنسبة ظل ب ى الى ظل ح ى

﴿ الكلام فى فروع الشكل الظلى ولواحقها ﴾

الفرع الاول كل مثلث قائم الزاوية فنسبة جيب تمام زاوية حادة يفرض فيه الى جيب الزاوية القائمة كنسبة ظل تمام وتر القائمة الى ظل تمام الضلع الواقع بين القائمة والحادة المفروضة ا وكنسبة ظل الضلع الواقع بين الزاويتين الظل وتر القائمة فليكن المثلث ا ب ح والقائمة زاوية ب والزاوية الحادة المفروصة زاوية ا نقول فنسبة جيب تمام زاوية ا الى الجيب الاعظم الذى هو جيب زاوية ب كنسبة ظل تمام قوس ا ح الى ظل تمام قوس ا ب

برهانه يتم قطاع ا ى ر ح من الارباع ويكون فيه بحكم الشكل الظلى نسبة

نسبة ظل ب ح الى جيب ا ب كنسبة ظل ء ه الى نصف القطر



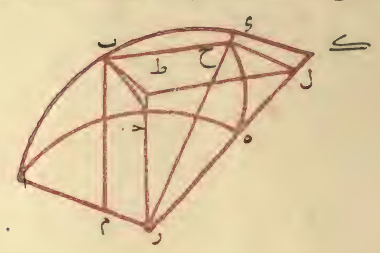
و بوجه آخر اذا اخذنا نصف القطر واحدا حسب ما اخذه ابوالريحان كان قدر نسبة ظل قوس ب ح الى نصف القطر هو ظل قوس ب ح ونسبة جيب قوس ا ب الى نصف القطر هو جيب قوس ا ب نفسه وقدر نسبة ظل قوس ء ه الى نصف القطر هو ظل قوس ء ه نفسه فيكون ظل قوس ب ح مؤلفا من جيب قوس ب ا وظل قوس ء ه اعنى يكون ظل قوس ب ح مساويا لضرب جيب قوس ب ا فى ظل قوس ء ه بل ضرب ظل قوس ب ح فى الواحد كضرب جيب قوس ب ا فى ظل قوس ء ه فتكون نسبة جيب قوس ب ا الى الواحد اعنى نصف القطر كنسبة ظل قوس ب ح الى ظل قوس ء ه الذى هو ظل زاوية ا وهكذا ان كان بدل قوس ب ح قوسا اخرى فاذن نسبة جيوب القسى بعضها الى بعض كنسبة اظلال عروضها بعضها الى بعض وذلك ما اردناه وقد تبين ههنا ان مرجع هذا الشكل الى تفصيل بطلميوس من الشكل القطاع كما كان مرجع المغنى الى تفصيله

﴿ اعتبار حكم هذا الشكل فى سائر المثلثات ﴾

وليعلم ان الحكم المبين لهذا الشكل نوعاً من الاختصاص والتشبث بالزاوية القائمة ليس للشكل المغنى ذلك ولذلك لم يمكن اعتبار حكم هذا الشكل فى المثلثات الحادة الزوايا والمنفرجة الزاوية من غير اعتبار زاوية قائمة فيها وهذا هو علة تخلف هذا الشكل عن الشكل المغنى فى الفضيلة مع كونهما كتوأمين تراضعا بلبان واحد بعد استلزامه دون المغنى به لتفاوت يقتضيه فرط التزايد فى بعض مقادير بعض الاضلاع على ما سيأتى الكلام فيه فاذا اردنا اعتبار هذا الشكل فى المثلثات



نقطتى ط ك ثم نخرج من ب عمود ب ح على فصل مشترك عليه ء ز فى سطح دائرة ا ب ويكون عمودا على سطح دائرة ء ه ومن ط عمود ط ل على فصل مشترك عليه ز ك فى سطح دائرة ا ه فيكون عمودا ايضاً على سطح دائرة ء ه ونصل ح ل فط ل ب ح متوازيان لكونهما عمودين على سطح واحد



وزاويتا ب ح ل ط ل ح قائمتان وزاوية ح ب ط قائمة فسطح ب ح ل ط متوازى الاضلاع قائم الزوايا ولكون ح ل موازيا ل ط الموازى ز ك يكون ح ل ك ء متوازيين فيكون مثلثا ز ح ل ز ك ء متشابهين ونسبة ز ح جيب تمام ب ء اعنى جيب ا ب الى ح ل اعنى ب ط ظل قوس ب ح كنسبة ز ء الجيب كله الى ء ك ظل زاوية ا وان اردنا القنا عمود ب م على ا ز ونبين كون سطح ب ح ز م متوازى الاضلاع قائم الزاويا ليظهر تساوى ز ح ب م وذلك ما اردناه

برهان اخر

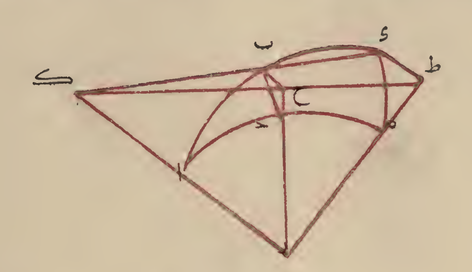
مستنبط من الشكل القطاع نعيد مثلث ا ب ح من القسى العظام وفيه زاوية ب قائمة ونخرج ا ب ا ح الى ان يتم ا ء ا ه ربعين ويتم قطاع ء ز ا ح من الارباع فبحكم الشكل القطاع نسبة جيب قوس ب ح الى جيب قوس ح ز تمامها مؤلفة من نسبة جيب قوس ا ب الى جيب قوس ا ء ومن نسبة جيب قوس ء ه الى جيب قوس ه ز تمامها ونسبة كل جيب قوس الى جيب تمامها كنسبة ظلها الى نصف القطر فلذلك نسبة ظل قوس ب ح الى نصف القطر مؤلفة من نسبة جيب قوس ا ب الى نصف القطر ومن نسبة ظل قوس ء ه الى نصف القطر واذا القينا الثانى والسادس من هذه المقادير الستة لتساويهما بقيت متناسبة



جيب قوس اخرى الى ظل عرضها وان كانت قوسا اء آه ربعين كانت كنسبة الجيب كله الى ظل زاوية ا

﴿برهان اخر﴾

نعيد مثلثي ابح اءه كما وصفناهما ونخرج عمودى بح ءط على سطح دائرة ابء ونصل نصفى قطرى ره رح ونخرجهما الى ان تلاقيا العمودين



على نقطتى ح ط ونصل وتر ءب ونصف قطر را ونخرجهما الى ان يتلاقيا على ك فلكون نقط ط ح ك فى سطح عمودى بح ءط المتوازيين وفى سطح دائرة اه تكون على خط مستقيم هو الفصل المشترك وهو خط طحك ويكون مثلثا كبح كءط متشابهين لاشتراكهما فى زاوية ك وكون زاويتى ب ء قائمتين فنسبة كب الى كء اعنى نسبة جيب قوس اب الى جيب قوس اء كنسبة بح الى طء اعنى نسبة ظل قوس بح الى ظل قوس ءه فاذن نسبة بعض جيوب القسى الى بعض كنسبة بعض اظلال عرضها الى بعض وان كانت اء اه ربعين كانت كنسبة اظلال العروض الى ظل زاوية ا وذلك ما اردناه

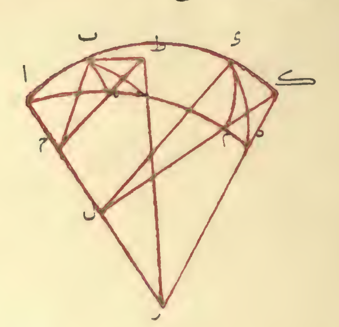
﴿برهان آخر﴾

نعيد مثلث ابح ونخرج قوسى اب اح الى ان يتما ربعين عند نقطتى ء ه ونرسم قوس ءه ونصل انصاف اقطار را رح رء ره ونخرج عمودى بط ءك على سطح دائرة اء ونخرج رح ره الى ان يلقياهما عند

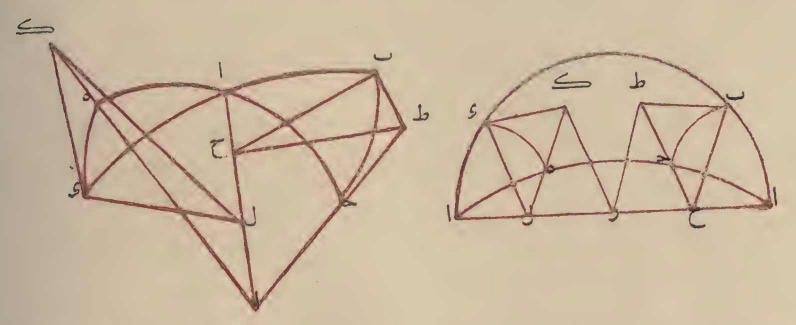
جيب قوس اب الى لء جيب قوس اء كنسبة بط ظل قوس بج الى ءك ظل قوس ىه وذلك ما اردناه وان انطبق احد المثلثين على الآخر كان البيان بحسبه على قياس ذلك

برهان اخر

ليكن مثلثا ابج اءه من القسى العظام وزاوية ا فيهما مشتركة وزاويتا ب ء قائمتين و ر مركز الكرة و را رج ره انصاف اقطارها ونجعل ا قطبا ونرسم من مدارى نقطتى ب ى قوسى به ءم ونخرج منهما عمودى بح ءل على ار فيكونان نصفى قطرى المدارين كما مر بيانه ونخرج من نقطتى ب ء ايضا عمودى بط ءك على سطح دائرة اء وهما الفصلان المشتركان بين المدارين و بين دائرتى بج ىه وذلك لكون المدارين والدائرتين جميعا قائمة على سطح دائرة اى و وجوب كون فصليهما المشتركين المارين بنقطتى ب ء عمودين وامتناع خروج اكثر من عمود واحد من كل نقطة على السطح الذى منه تلك النقطة وليتنهيا الى سطح دائرة به عند نقطتى ط ك ولكون



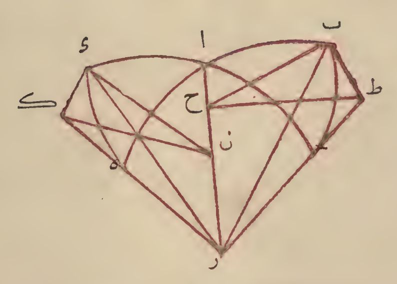
نقط ط ه ح فى سطحى مدار به و دائرة اجه يكون على خط طح المستقيم الذى هو الفصل المشترك بينهما وكذلك نقط ك م ل ولتشابه قوسى به ءم الواقعة بين عظيمتى اء اه المارتين بقطب ا ولتساوى نسب اظلال القسى المتشابهة من الدوائر المختلفة الى انصاف اقطارها تكون نسبة بح جيب قوس اب الى بط ظل قوس بج كنسبة ءل جيب قوس اء الى ءك ظل قوس ءر فنسبة جيب كل قوس الى ظل عرضها كنسبة



عدة على منوال بعض البراهين المذكورة فى الشكل المغنى ليكون الكلام متناسبا ان شآء الله تعالى وهى هذه

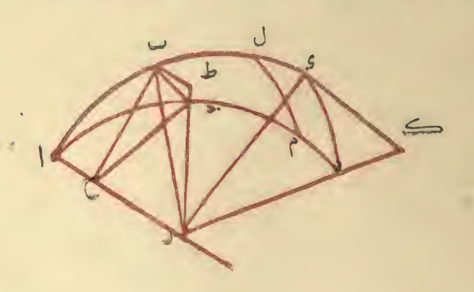
طريق اخرى

ليكن فى مثلثى اب ح اء ه الكائنين من القسى العظام زاويتا آ المتقابلتان متساويتين وزاويتا ب ء قائمتين وتخرج من مركز الكرة وهو ر انصاف اقطار ر ح رب را رء ره الجيب ومن نقطتى ب ء عمودى ب ح ء ل على فصل ار المشترك وعمودى ب ط ء ك على سطحى دائرتى اب اء الى ان تلاقيا نصفى قطرى رح ره على نقطتى ط ك ونصل ط ح ك ل فلكون ب ح ط ر فى سطح دائرة اح يكون ط ح فى ذلك السطح ويكون عمودا على ار بحكم المقدمة و ء ل فى ذلك السطح ايضا عمود على ار و ط ح ء ل متوازيان



و بمثل ذلك نبين توازى ب ح ل ك الكائنين فى سطح دائرة ب ه العمودين على ار فزاوية ب ح ط مساوية لزاوية ء ل ك ولكون هاتين الزاويتين متساويتين وزاويتى ب ء قائمتين يكون مثلثا ب ح ط ء ل ك متشابهين ونسبة ح ب

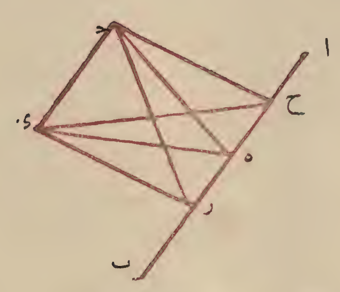
لكون اء ربعا ونخرج طح فيكون مثلثا طبح كءر متشابهين لتوازى بح ءر الكائنين معا فى سطح دائرة ابء وعمودين على ار وتوازى رك



رط العمودين على سطح واحد وهو سطح دائرة ابء ويكون طح كر ايضا متوازيين بحكم المقدمة التى ذكرناها ههنا وان اردنا اخرجنا اولا من نقطتى ط ك عمودى طح كر على ار فى سطح دائرة احه ونصل بح ءر ونبين توازيهما بحكم المقدمة المذكورة فى اول الشكل المغنى لتكون تلك المقدمة وحدها كافية فى الشكلين واذا تبين توازى اضلاع مثلثى طبح كءر النظائر كانت نسبة بح الذى هو جيب قوس اب الى ءر الذى هو نصف القطر اعنى جيب الزاوية القائمة كنسبة بط الذى هو ظل قوس بحـ الى ءك الذى هو ظل قوس ءه اعنى ظل زاوية ا وذلك ما اردناه وتبين من ذلك انا ان فرضنا قوسا اخرى مثل قوس لم القائمة على سطح دائرة اء كانت نسبة جيب ال جيب اء ايضا كنسبة ظل لم الى ظل ءه فنسبة جيب اب الى جيب ال كنسبة ظل بحـ الى ظل لم فتكون نسبة جيوب بعضها الى بعض كنسب اظلال عروض تلك القسى بعضها الى بعض و بالابدال نسبة جيب كل قوس الى ظل عرضها كنسبة الجيب الاعظم الى ظل زاوية ا وفى كل مثلثين قائمى الزاوية يتساوى حادتين منهما وان لم تنطبق احدهما على الآخر كمثلثى ابحـ اءه فى هاتين الصورتين اللتين يتساوى منهما زاويتا ا الحادتين وتكون زاويتا ب ء قائمتين يكون الحكم على الوجه المذكور ثابتا بمثل ما مر واهل الصناعة اقتصروا على هذا البرهان وانا اضفت اليه براهين

مساويا لمربعى حه هز فمربع ءز مساو لمربعات حء ءه هز ومربع ءه مساو لمربعى حء حه فمربع ءز مساو لمربعى ءه هز فاذن زاوية ءهز قائمة وذلك ما اردناه

برهان آخر نفصل هح مساويا له ز ونصل حح ءح فى مثلثى حح ه حهز ضلعا حه هح مساويان لضلعى حه هز وزاويتا ه قائمتين فلذلك يكون حح مساويا لحز ولكون ءح حح مساويين لءح حز وزاويتا



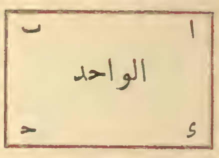
ءحح قائمتان يكون ءح مساويا ءز ولتساوى اضلاع مثلثى ءحه ءهز تكون زاويتا ه متساويتين فاذن ءه عمود على اب وذلك ما اردناه

(الشكل الظلى)

ليكن مثلث ابح من القسى العظام وزاوية ب منه قائمة وزاوية ا حادة فنقول نسبة جيب قوس اب الى الجيب كله الذى هو جيب زاوية ب كنسبة ظل بح الى ظل زاوية ا

برهانه يخرج ضلعى اب اح الى ان يصير اء اه ربعين تامين وليمر من العظام قوس ءه منها بينهما فهى مقدار زاوية ا ويخرج من نقطتى ب ء عمودى بط بك على سطح دائرة ابء الى ان ينتهيا الى سطح دائرة احه عند نقطتى ط ك فيكونان لا محالة فى سطحى دائرتى بح ءه كل فى سطح دائرته وذلك لقيام هاتين الدائرتين على سطح دائرة ابء وخروج العمودين من فصلهما المشتركين ونخرج من مركز الكرة وهو ز نصفى قطرى زه زح ونجرهما الى نقطتى ك ط ونخرج ايضا نصف قطر از وهو الفصل المشترك بين دائرتى اى اه ونخرج من ب عمود بح على از ونصل قطر زء وهو ايضا عمود على از

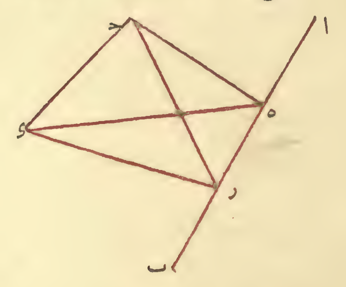
والخلاف نسبة ح الى الواحد كنسبة ا الى ب وفى القسمة الثانية نسبة الواحد الى ا كنسبة ى الى ب وبالابدال نسبة الواحد الى ء كنسبة ا الى ب



فاذن نسبة ح الى الواحد كنسبة الواحد الى ء وتبين منه انا اذا قسمنا عددا على عدد فحصل ظل قوس كان الحاصل من قسمة العدد الثانى على العدد الاول ظل تمام ذلك القوس فهذه وامثالها من خواص الظل وفى معرفتها غناء عظيم فى هذا الباب ونرجع الى المقصود ونجعل اكثر بيانات هذا الشكل محاذيا لبيانات الشكل المغنى ونبدأ بالمقدمة التى تشبه المقدمة التى اوردها ابونصر هناك وهى هذه

مقدمة

اذا تقاطع سطحان مستويان على غير قوائم وفرض على احدهما نقطة واخرج منها عمودان احدهما قائم على السطح الذى خرج منه ومنته الى السطح الآخر وبين موقع العمود من الفصل المشترك لخط مستقيم كان الخط الواصل عمودا على الفصل المشترك فليكن الفصل المشترك بين السطحين اب والنقطة المفروضة على السطح الاول ح وليقم عليه عمود حء ونقطة المنتهى على السطح الثانى ء وليقم من ح فى السطح الاول عمود حه على اب ويصل ءه ونقول انه ايضا عمود على اب



برهانه فرض على اب نقطة اخرى وليكن ر ونصل حر رء فلتكون زاوية ءحر قائمة يكون مربع ءر مساويا لمربعى ءح حر ومربع حر كان

الضرب و نسبة الواحد الى العدد الثالث المقسوم عليه ايضا كنسبة الخارج من القسمة الى المقسوم وسطح المضروب فى المقسوم المساوى لمربع الواحد مساو لسطح حاصل الضرب فى الخارج من القسمة فضرب حاصل الضرب فى الخارج من القسمة ايضا مساو لمربع الواحد والواحد وسط فى النسبة بينهما واذا كان ذلك كذلك فكل عدد ضرب فيه ظل قوس وقسم عليه ظل تمام ذلك القوس كان الحاصل من الضرب والخارج من القسمة ظلين بتوسط نصف القطر بينهما و يكون قوسا هما معا مثل ربع الدور وايضا اذا كان الواحد وسطا

ا ه ح

الواحد

ب ز ء

فى النسبة تارة بين ا و ب وتارة بين ح و ء وضرب ا فى ح فحصل ه و ب فى ء فحصل ز كان الواحد وسطا فى النسبة بين ه و ز وذلك لان نسبة الواحد الى ح كنسبة ا الى ه وبالخلاف نسبة ح الى الواحد كنسبة ه الى ا و نسبة الواحد الى ء كنسبة ب الى ز لكن نسبة ح الى الواحد كنسبة الواحد الى ء فنسبة ز الى ا كنسبة ب الى ز و ه فى ز كا فى ب الذى هو كمربع الواحد فه فى ز مساو لمربع الواحد فالواحد وسط بينهما فى النسبة وايضا ان قسم ا على ح فحصل ه وقسم ب على ء فحصل ز كان الواحد وسطا بين ه و ز وذلك لان نسبة الواحد الى ح كنسبة ه الى ا وبالخلاف نسبة ح الى الواحد كنسبة ا الى ه ونسبة الواحد الى ء كنسبة ز الى ب فنسبة ا الى ه كنسبة ز الى ب وسطح ا فى ب لسطح ه فى ز فالواحد وسط فى النسبة بين ه و ز وتبين منه انا اذا ضربنا ظل قوس فى ظل قوس وضربنا ظل تمام احد القوسين فى ظل تمام الاخرى كان الحاصلان من الضرب بين ظلى قوسين احديهما تمام الاخرى وكذلك فى القسمة اذا قسمنا ظل قوس على ظل قوس وقسمنا ظل تمام الاولى على ظل تمام الثانى كان الخارجان من القسمة ظلى قوسين احديهما تمام الاخرى وايضا اذا كان عدد ان كا ب فقسم ا على ب فحصل ح و ب على ا فحصل ء كان الواحد وسطا فى النسبة بين ح و ء وذلك لان النسبة الاولى نسبة الواحد الى ب كنسبة ح الى ا و بالابدال



الظل الاول بالاجزآء التى يقدرونها للجيوب والاوتار ولتقدير الظل الثانى تارة باثنى عشر جزؤا يسمونها اصابع وتارة تسعة اجزآء اوستة اجزآء ونصف يسمونها اقداما فالظل الاول لكل قوس هو الظل الثانى لتمامها وبالعكس ونسبة الظل الى نصف القطر كنسبة جيب القوس الى جيب تمامها ونسبة الظل الى قطر الظل كنسبة الجيب الى نصف القطر وذلك لتشابه مثلثى ر ا ه ب ح ه وايضا لتشابه مثلثى ا ر ه ك ط ه لتوازى ا ه ه ط وتوازى ا ه ك ط ووقوع ر ه عليهما فتساوى المتبادلتان وزاويتا ا و ط قائمتان تكون نسبة ر ا الى ا ه كنسبة ه ط اعنى ا ه الى ط ك فيكون نصف القطر فى النسبة وسطا بين ظل القوس وظل تمامها ويلزم منه ان تكون نسبة ظل كل قوس الى ظل قوس اخرى كنسبة ظلى تماميهما على التكافى وايضا تكون نسبة ظل كل قوس الى ظل تمام قوس آخر كنسبة ظل القوس الآخر الى ظل تمام القوس الاول وكل عدد ضرب فى عدد وقسم على عدد آخر وكان الواحد وسطا فى النسبة بين المضروب منه والمقسوم عليه كان الحاصل من الضرب والخارج من القسمة عددا واحدا وذلك لان نسبة الواحد الى المضروب فيه يكون كنسبة المضروب الى الحاصل من الضرب ونسبة الواحد الى المقسوم عليه كنسبة الخارج من القسمة الى المقسوم وبالخلاف نسبة المقسوم عليه الى الواحد كنسبة المقسوم الى الخارجه من القسمة ولما كانت فى الصورة المفروضة نسبة المقسوم عليه الى الواحد نسبة الواحد الى المضروب فيه تكون نسبة المقسوم الى الخارج من القسمة كنسبة المضروب الى حاصل الضرب وبالابدال نسبة المقسوم الى المضروب كنسبة الخارج من القسمة الى حاصل الضرب وكان المضروب والمقسوم فى الفرض عددا واحدا فاذن حاصل الضرب والخارج من القسمة يكون عددا واحدا واذا تقرر ذلك فانا اذا قدرنا نصف القطر بجزؤ واحد كما قدره ابو ريحان كان الحاصل من ضرب كل عدد فرض فى ظل قوس هو الخارج من قسمته على ظل تمام ذلك القوس وايضا كل عددين كان الواحد وسطا بينهما فى النسبة ضرب احدهما فى عدد ثالث وقسم الآخر على ذلك العدد الثالث كان الواحد ايضا وسطا بين حاصل الضرب والخارج من القسمة وذلك لان نسبة الواحد الى العدد الثالث المضروب فيه كنسبة العدد الاول الذى هو المضروب الى حاصل

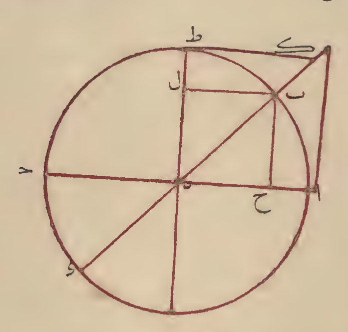
الفصل السادس

في الشكل الظلي وشرح فروعه ولواحقه

السبق في استنباط هذا الشكل لأبي الوفآء البوزجاني بلاتنازع من غيره على ماذكره ابوالريحان والدعوى فيه ان في مثلث القائم الزاوية الذي يكون من القسي العظام تكون نسبة جيب احد ضلعي القائمة الى جيب الزاوية القائمة كنسبة ظل الضلع الآخرمن ضلعي القائمة الى ظل الزاوية الموترة به



وقبل الخوض في البرهان عليها اقول المراد ههنا من ظل القوس هوما يفصله قطران يمران بطرفي تلك القوس من العمود الخارج من احد طرفيها على القطر المار بذلك الطرف ويكون ذلك العمود موازيا لجيب تلك القوس اذا كان عمودا على ذلك القطر فلنرسم دائرة عليها ا ب ح ى ومركزها ه ونفصل منها قوسا ماهي قوس ا ب ونخرج قطرين يمران بنقطتي ا ب هي قطرا ا ح ب ى ونخرج من ا على ا ح عمود ا ز الى ان تلاقي قطر ى ب على ز فا ز



هو ظل قوس ا ب وهو مواز ب ح جيبها وايضا نخرج عمود ه ط من المركز على ا ح وعمود ط ك من نقطة ط فتكون ط ك ظل قوس ط ب و ب ل جيبها وهما ظل قوس ا ب وجيبه والمنجمون يسمون ماسميناه ظلا على الاظلال بالظل الاول والظل المعكوس لقوس ا ب التي هي بالقياس الى الظل قوس الارتفاع ويسمون ط ك بالقياس الى قوس ا ب ظلا ثانيا وظلا مستويا ويسمون ز ه بقطر الظل الاول و ك ه بقطر الظل الثاني ويقدرون القطر لتقدير

وايضا ضلع ب ح تمام ح ز التى هى قوس ميلها لجيب زاوية ح هو قوس ز ه الذى هو تمام زاوية ا وهذاالمغنى يفيدالنسبة التى بين الزاوية والوتر اما فى‌العمل ففائدته راجعة الى الفرع الثانى

وههنا فرع آخر وهو ان نقول نسبة جيب تمام الزاوية غيرالقائمة الى جيب تمام وترها كنسبة جيب وتر الزاوية الاخرى غيرالقائمة الى وترالزاوية القائمة اعنى نسبة جيب تمام زاوية ا الى جيب تمام قوس ب ح كنسبة جيب قوس ب ا التى هى وتر زاوية ح الى جيب قوس ا ح التى هى وترالقائمة والعلة فيه ان نسبة جيب قوس ه ز الى جيب قوس ز ح كنسبة جيب قوس ب ا الى جيب قوس ا ح كما بين فى‌المغنى وهذاالفرع ليس فى‌استخراج المجهولات بكثيرالنفع لان المجهول فيه لايتبين الا بمعرفة ثلثة معلومات غير القائمة وبالمغنى وفرعيه الاخيرين يتبين بمعلومين فقط وقدذكروا لهذا الشكل فروعا ولواحق غير ما قلناه وفيما ذكرناه كفاية بحسب مانقصده الآن

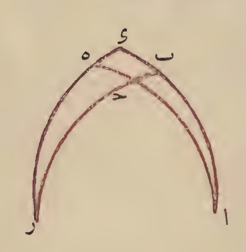
وقدلقب ابومحمود الخجندى هذا الشكل بقانون الهيئة وغيره لقبوه بالمغنى عن‌القطاع وذكر ابوالريحان فى كتاب مقاليد علم مايحدث فى بسيط الكرة ان السبق فى اقامة هذاالشكل مقام‌الشكل القطاع كان للامير ابى نصر واما لقب‌المغنى فوسمه الكيا كوشيار بن لبان‌الجيلى به

اقول وفيه نظر لان الامير ابانصر قال فى الجملة الثانية من المقالة الاولى من كتابه الموسوم بالمجسطى الشاهى فى‌صدر الباب الثالث المشتمل على بيان هذاالشكل بهذه العبارة « الباب‌الثالث فيما يغنى عن‌الشكل القطاع » وذكر فى هذا الباب بعد ان ذكر الرسالة التى عملها ثابت بن‌قرّة فى اختلاف وقوعات الشكل القطاع فقال «وعمل ايضا رسالة فيما يغنى عنه جنسه (يعنى عن‌الشكل القطاع) الاانه لابدلمن عمل بذلك من استعمال النسبة المؤلفة » اقول وقد ذكره الامير ابو نصر فى شرح مانالاؤس وقد ذكرت هذا فى الشكل‌المغنى عن القطاع واما انا فاذكر ههنا مايغنى عن الشكل القطاع والنسبة المؤلفة وهذا يدل ان اللقب ايضا وضعه الامير ابو نصر اواخذه من ثابت ابن قرّة والله اعلم

تمام اح كنسبة رب نصف القطر اعنى الجيب الاعظم الى بع جيب تمام اب وذلك ماأردناه

الفرع الثانى كل مثلث قائم الزاوية من القسى العظام فنسبة جيب تمام زاوية منه غير القائمة الى جيب تمام وترها كنسبة جيب الزاوية الاخرى غير القائمة الى جيب الزاوية القائمة ونعيد مثلث ابح وفيه زاوية ب قائمة نقول فنسبة جيب تمام زاوية ا الى جيب تمام ضلع بح كنسبة جيب زاوية ح الى جيب زاوية ب القائمة

برهانه تمم قطاع دار من الارباع التامة فيكون فى مثلث حهز ايضا زاوية ه فيه قائمة وفيه بحكم الشكل المغنى تكون نسبة جيب هز الى جيب زح كنسبة جيب زاوية ح الى زاوية ه القائمة ولكون هز تمام ده التى هى قدر زاوية ا و حز تمام بح التى هى وتر زاوية ا يكون فى مثلث ابح نسبة جيب تمام زاوية ا الى جيب تمام ضلع بح كنسبة جيب زاوية ح الى جيب الزاوية القائمة وذلك ما اردناه وعلى هذين الفرعين تدور جميع المسائل المبنية على فروع الشكل المغنى



قال الأمير أبو نصر كل زاوية غير القائمة فى مثلث قائم الزاوية الكائن من القسى العظام يكون بقدر تمام ميل تمام وترها من الميل الذى يكون اعظمه بقدر الزاوية الاخرى غير القائمة من ذلك المثلث و بالعكس يكون وترها تمام قوس يكون تمام ميلها هو قدر الزاوية الموترة بهذا الوتر والميل من الذى وصفنا اعظمه وذلك ان قدر زاوية ا من مثلث ابح من القطاع الذى اوردناه فى الفرع الثانى هو ده التى هى تمام هز و هز ميل قوس حز من الميل الذى يكون اعظمه بقدر زاوية ح وقوس حز تمام قوس بح فاذن ده تمام ميل تمام بح من الميل الموصوف

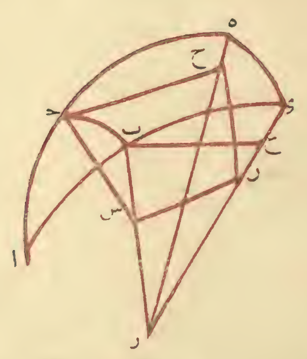
برهانه نخرج اج اب الى تمام ربعى اه اء ونخرج ءه بج الى ز وهو



قطب اء فقطاع ءزاج من ارباع تامة وفيه زوايا ه ء ب قوائم ولما مر فى الشكل المغنى تكون نسبة جيب قوس زج الى جيب قوس جه كنسبة جيب قوس زب الى جيب قوس بء و زج هو تمام جب و جه هو تمام جا و زب الجيب الاعظم و بء تمام اب فاذن نسبة جيب تمام بج الى جيب تمام جا كنسبة الجيب الاعظم الى جيب تمام اب وذلك ما اردناه

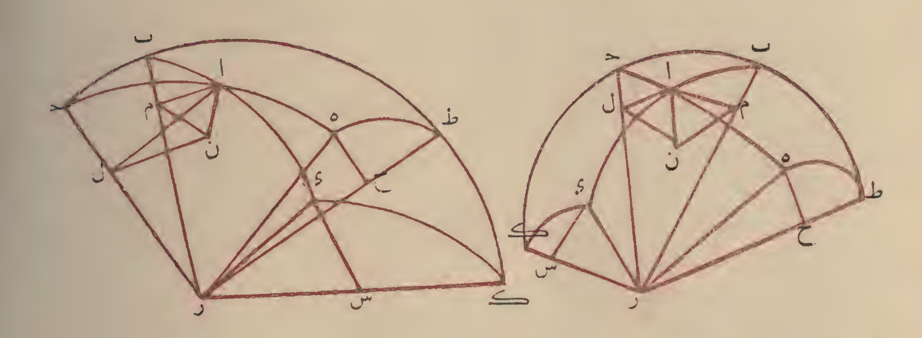


و بوجه آخر قد اورده ابو الفضل التبريزى و ابو جعفر الخازن كل واحد منهما فى تفسيره للمجسطى شكلا لمعرفة المطالع يتبين هذا البرهان منه وتقريره بان نعيد الشكل الذى اوردناه رواية عنهما للبرهان على المغنى ونبين بالبيان المذكور هناك ان سطح جحنس متوازى الاضلاع قائم الزوايا وان عمود جح عمود على سطح دائرة هء فيكون سن الموازى له ايضا عمودا على ذلك السطح و يكون مثلث سنز قائم الزاوية فان زاوية ن فيه قائمة ونخرج من ب عمود بع على ءز فى سطح دائرة اب و سن فى ذلك السطح فيكون مثلثا زبع زسن



متشابهين ونسبة زس جيب تمام بج الى سن المساوى لح اعني جيب

ط ب حـ مارة بقطبها الذى هو نقطة حَ يكون سطح دائرة ط ه قاطعاً لسطح دائرة



ط ب حـ على قوائم ونخرج ايضا عمود ى س ونبين انه عمود على سطح دائرة ط ب حـ واذاتقرر ذلك نبين تشابه مثلثى ا ن ل ه ح ر لتوازى ضلعى ا ل ه ر وضلعى ا ن ه ح وضلعى ن ل ح ر وتشابه مثلثى ا ن م ى س ر بمثل ذلك فتكون نسبة ضلع ا م الى ضلع ا ن من مثلث ا م ن كنسبة ضلع ر ى نصف القطر الى ضلع ى س من مثلث ى ر س ونسبة ضلع ا ن الى ضلع ا ل من مثلث ا ن ل كنسبة ضلع ه ح الى ضلع ه ر نصف القطر من مثلث ه ح ر وحكم ر ى ر ه لتساويهما واحد فبالمساواة المضطربة نسبة ا م الى ا ل كنسبة ه ح الى ى س و ا م هوجيب ضلع ب ا و ا ل هو جيب ضلع ا حـ و ه ح هو جيب ط ه اعنى جيب زاوية حـ و ى س جيب ى ك اعنى جيب زاوية بَ فنسبة جيب قوس ا ب الى جيب قوس ا حـ كنسبة جيب زاوية حَ الى جيب زاوية بَ وذلك ما اردناه

الكلام فى فروع المغنى ولواحقها

الفرع الاول كل مثلث قائم الزاوية من القسى العظام فنسبة جيب تمام احد ضلعى القائمة الى جيب تمام وترها كنسبة جيب القائمة الى جيب تمام الضلع الثالث فليكن المثلث ا ب حـ والقائمة زاوية بَ نقول فنسبة جيب تمام ضلع ب حـ الى جيب تمام ضلع ا حـ كنسبة الجيب كله الى جيب تمام ضلع ا ب

ء فبالمساواة المضطربة نسبة جيب قوس اب الى جيب قوس اج كنسبة جيب زاوية ج الى جيب زاوية ب وذلك ما اردناه

وبوجه آخر لنا اربعة مقادير اخرى متناسبة فى المثلث الاول واربعة مقادير اخرى متناسبة فى المثلث الثانى وكان الثانى والثالث من الاربعة الاولى مساويين للاول والرابع من الاربعة الثانية فسطح الثانى فى الثالث من الاربعة الاولى مساو لسطح الاول فى الرابع فى الاربعة الثانية ويلزم منه ان يكون سطح الاول فى الرابع فى الاربعة الاولى مساويا لسطح الثانى فى الثالث من الاربعة الثانية ونسبة الاول من الاربعة الاولى اعنى جيب قوس اب الى الثانى من الاربعة الثانية اعنى جيب قوس اج كنسبة الثالث من الاربعة الثانية اعنى جيب زاوية ج الى الرابع من المقادير الاولى اعنى جيب زاوية ب وذلك ما اردناه

﴿ برهان اخر للأمير ابى نصر ﴾

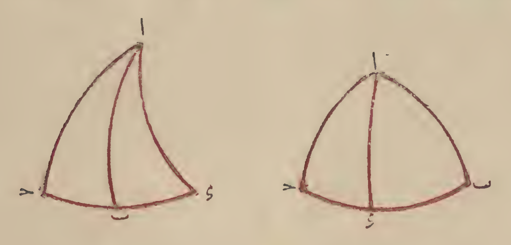
نعيد مثلث ابج فى صورة حادّ الزوايا وفى صورة منفرج زاوية ب ونخرج بج الى ان تصير كل واحدة من قوسى بء بك ربعا وكذلك قوسا جه جط ونرسم قوسى طه كء من العظام وهما قدرا زاويتى ج ب ان كانتا حادتين وتمام قدر ب المنفرجة من نصف الدور ان كانت منفرجة وعلى التقديرين يكون جيباهما جيبى زاويتى ج ب وليكن مركز الكرة ر ونخرج منه انصاف اقطار رب رج رء رط رك ويكون كل واحد منهما فصل مشترك بين دائرتين وذلك ظاهر ونخرج من نقطة ا ثلثة اعمدة احدها فى سطح دائرة اب على الفصل المشترك الذى عليه بر وهو ام ويكون لامحالة موازيا لقطر ءر والثانى عمود ال فى سطح دائرة جا على الفصل المشترك الذى عليه جر ويكون موازيا لقطر هل والثالث عمود ان فى سطح دائرة طبج ونصل نم نل فيكونان عمودين على الفصل المشترك كما بين فى المقدمة ويخرج من ه عمود هح على الفصل المشترك الذى عليه طر ويكون فى سطح دائرة هط ولكون دائرة

تكون نسبة جيب قوس حا الى جيب قوس حب كنسبة الواحد الذى هو نصف القطر وجيب القائمة الى جيب قوس هء اعنى جيب زاوية آ وذلك ما اردناه واذا كان بدل قوس اح قوسا آخر كان حكمها حكم قوس اح فاذن نسبة جيوب القسى الى جيوب ميولها كنسبة الجيب كله الى جيب زاوية آ وههنا تمام الكلام فى البرهان على هذا الشكل

﴿ اعتبار حكم الشكل المغنى فى سائر المثلثات ﴾

واما فى المثلثات الحاد الزوايا والمنفرج الزاوية فالدعوى ما ذكرناه فى صدر الفصل وهو ان نسبة جيوب الاضلاع بعضها الى بعض كنسبة جيوب الزوايا الموترة بتلك الاضلاع بعضها الى بعض فليكن مثلث ابح من القسى العظام غير قائم الزاوية اقول فنسبة جيب ضلع اب الى جيب ضلع اح كنسبة جيب زاوية ح الموترة بضلع اب الى جيب زاوية ب الموترة بضلع اح

برهانه نرسم قوسا من عظيمة تمر بقطب دائرة بح و بنقطة آ ولتكن دائرة بح على ى على قوائم فان كانت زاويتا ب و ح حادتين وقعت نقطة ى داخل



المثلث وان كانت احديهما منفرجة وقعت خارج المثلث مما يلى الزاوية المنفرجة ولتكن فى احدى هاتين الصورتين زاوية ب منفرجة وعلى التقديرين يحدث مثلثان قائما الزاوية احدهما ابى والثانى احء ففى المثلث الاول تكون نسبة جيب قوس اب الى جيب قوس اء كنسبة جيب الزاوية القائمة اعنى زاوية ء الى جيب زاوية ب وفى المثلث الثانى نسبة جيب قوس اء الى جيب قوس اح كنسبة جيب زاوية ح الى جيب الزاوية القائمة اعنى زاوية



قوس اح الى جيب قوس حن اعنى نسب جيوب القسى الى جيوب ميولها متساوية وذلك ما اردناه فهذا ما ذكره هؤلاء الافاضل فى هذا الباب

برهان اخر مستنبط من الشكل القطاع

نعيد المثلث وفيه زاوية ب قائمة ونتمم ربعى اء اه ونرسم قوس ده ونخرجه ونخرج وتر بح الى ان يلتقيا عند ز فبالتركيب نسبة جيب قوس زد الى جيب قوس هد مؤلفة من نسبة جيب قوس زب الى جيب قوس بح ومن نسبة جيب قوس حا الى جيب قوس اه ولان دز زب ربعان لكون زاويتى د ب قائمتين تكون فى الاربعة الباقية نسبة جيب قوس اح الى جيب قوس حب كنسبة جيب قوس اه اعنى جيب الزاوية القائمة الى جيب قوس ده جيب زاوية ا وذلك ما اردناه

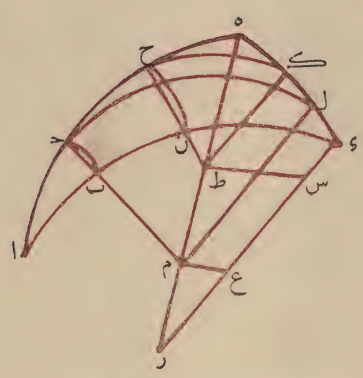
وبوجه آخر نسبة جيب قوس حب الى جيب قوس بز بالتركيب مؤلفة من نسبة جيب قوس حا الى جيب قوس اه ومن نسبة جيب قوس هد الى جيب قوس دز ففى هذه المقادير الستة زب ها زد ارباع وجيوبها بقدر انصاف الاقطار واذا جعلناه احادا كما يجعله ابو الريحان كان قدر نسبة جيب قوس حب الى جيب قوس بز المؤلفة هو جيب قوس حب بعينه وقدر نسبة جيب قوس حا الى جيب قوس اه الاولى هو جيب قوس حا



بعينه وقدر نسبة جيب قوس هد الى جيب قوس دز الثانية هو جيب قوس هد بعينه واذن اذا ضرب جيب قوس حا فى جيب قوس هد حصل جيب قوس حب وجيب قوس حب اذا ضرب فى الواحد كان الحاصل هو نفس حب فجيب قوس حا فى جيب قوس هد كجيب قوس حب فى الواحد ولذلك

زاويتا ب ن قائمتين ونرسم على قطب دائرة اء قوسين عليهما حل حك من مدارين احدهما يمر بنقطة ح والآخر بنقطة ح فيكونان متوازيين لربع اء ونخرج عمودى حم حط على نصف قطر ره وظاهر ان رم يساوى جيب قوس اح و رط يساوى جيب قوس اح وذلك لكون حم جيب قوس حه تمام حا و حط جيب قوس هح تمام قوس اح ونخرج من نقطتى م ط موقعى العمودين عمودى مع طس على نصف قطر رء

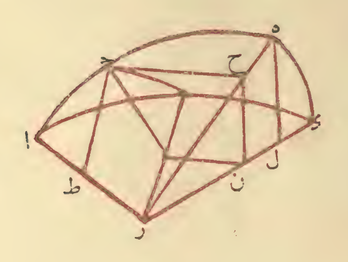
٤٤



ولأنّ سطح دآئرة هء تقطع سطح دآئرة اء على قوآئم فهو يقطع سطح هذين المدارين على قوائم اذمر بقطب الجميع وعمود حم لكونه فى سطح دائرة اه قائما على الفصل المشترك الذى عليه ره فيكون عمودا على سطح دائرة هء ولكونه مارا بمحيط المدار وكون المدار قائما على هذا السطح يكون هذا العمود بعينه فى سطح مدار حل ونخرج خط لم وهوالفصل المشترك بين دائرة بين سطح دائرة ءه ومدار حل ولتوازى سطح دائرة ءا وسطح مدار حل ووقوع سطح دائرة ره عليهما يكون الفصلان المشتركان اللذان عليهما ءر لم متوازيين و عم عمود عليهما فيكون جيب قوس ءل مساويا وموازيا لع م ونبين بمثل هذا البيان ان سط مساو لجيب ءك ثم نقول ءل بح قوسان من عظيمتين مارتان بقطب المتوازية وقد وقعا بين دوائر متوازية فهى متساوية لما تبين فى كتاب الاكر وكذلك كء و حن فيكون عم مساويا لجيب بح و سط مساويا لجيب حن ولما كانت نسبة رم الى مع كنسبة رط الى طس تكون نسبة جيب قوس اح الى جيب قوس حب كنسبة جيب

طريق اخرى

والبرهان الذى اورده ابو محمود الخجندى قريب من هذا البرهان جداً بل هو هو وذلك ان نعيد مثلث ا ب ح ونتم اه اد ربعين ونخرج من ز المركز انصاف اقطار عليها ز ا زد زه زب ونبين ان از عمود على سطح دائرة ه د فيكون عمودا على انصاف اقطار ه ز د ز ونخرج عمود ح ح على سطح دائرة ه د

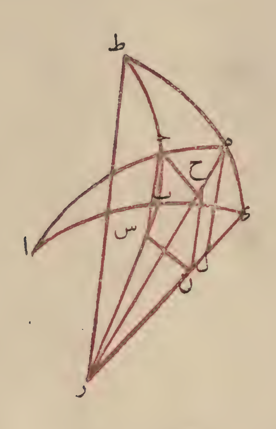


وعمودى ح س ح ن على سطح دائرة ا ب د ونصل ن س ونبين ان ح ح ن س متوازيا الاضلاع قائم الزاويا ونخرج عمود ه ل ونبين انه مواز لعمود ح ن وان مثلثى ه ل ز ح ن ه متشابهان ونخرج عمود ح ط فى سطح دائرة اه على الفصل المشترك الذى عليه از ويكون موازيا ح ز وتكون زوايا ز ط قوائم ولكون ح ح عمودا على ه ز تكون زاوية ح ح ز ايضا قائمة فيكون سطح ح ز ط ايضاً متوازى الاضلاع قائم الزاويا ونسبة ز ح اعنى ح ط جيب قوس ا ح الى ح ن اعنى ح س جيب قوس ح ب كنسبة زه نصف القطر بل جيب القائمة الى ه ل جيب زاوية ا وان فرضت على قوس اه نقطة اخرى كان حكمها هذا الحكم فاذن نسب جيوب القسى الى جيوب الميول متساوية وذلك ما اردناه

برهان آخر لأبى ريحان

نعيد مثلث ا ب ح ونتم ربعى اه اد ونعلم على قوس اه نقطة ح فى غير موضع ح ونرسم ح ن من العظام قاطعة ا د على قوائم فتكون

ح عمود حح على نصف قطر هر الذى هو الفصل المشترك بين دائرتى اه هء المتقاطعتين على قوائم فيكون عمودا على سطح دائرة هء ومن ح عمود حس على بر الذى هو الفصل المشترك بين دائرتى حب اب ومن ح عمود حن فى سطح دائرة هء على الفصل المشترك الذى هو ءر فلكون عمودى حس حن فى سطح دائرتين قطعنا سطح دائرة ابء على قوائم على فصلهما المشترك فهما عمودان على سطح دائرة ابء فيكونان متوازيين



و بوجه آخر نقول لكون حس طر فى سطح دائرة واحدة عمودين على فصل مشترك يكونان متوازيين وكذلك حن طر فاذن حس طر متوازيان ونصل ن س ولا محالة تكون زاويتا حن س حس ن قائمتين ولكون حح عمودا على سطح دائرة هء و حن فى سطحها تكون زاوية حح ن ايضاً قائمة فيكون سطح حح ن س متوازى الاضلاع ويخرج من ه عمود هل على ءر فيكون هل حن متوازيين ومثلثا هلر حنر متشابهين فتكون نسبة له الى هر كنسبة ن ح الى حر و نه جيب قوس هء التى هى قدر زاوية ا و هر جيب الزاوية القائمة و نح المساوى حس يساوى جيب بح و حر يساوى جيب حا لان حح عمود على نصف قطر هر و اح تمام هح من الربع فاذن نسبة جيب زاوية ا الى جيب زاوية ب القائمة كنسبة جيب ضلع بح الى ضلع اح وذلك ما اردناه

دائرتى ح ى ح ب قائمتان على دائرة ب ى على قوائم يكون ح ج موازيا لسطح دائرة ب ى ويكون العمودان الخارجان من نقطتى ح ج عليه اعنى جيبى قوسين متساويين اللذين بطرفيهما ح ج متساويين ونخرج وترى ه ح ه ج ونصفى قطرى ز ى ز ا ولكون وتر ه ح ونصف قطر ز ى فى سطح دائرة ه ى وليس ه ى اعظم من الربع فهما يتلاقيان وليتلاق لمثله وتر ه ج ونصف قطر ز ا الكائنين فى سطح ج ه على ك ويكون ط ك على الفصل المشترك بين سطح مثلث ه ح ج وسطح دائرة ى ب ونصل ط ك وخطا ح ج ط ك الكائنين فى سطح ه ج على ك ويكون ط ك على الفصل المشترك من سطح مثلث ه ح ج وسطح دائرة ى ب ونصل ط ك وخطا ح ج ط ك الكائنين فى سطح واحد لا يتلاقيان فهما متوازيان ونسبة ه ط الى ط ح كنسبة ه ك الى ك ج وكما بينا فى مقدمات القطاع الكرى تكون نسبة ه ط الى ط ح كنسبة جيب قوس ه ى الى جيب قوس ى ح المساوية لب ج ونسبة ه ك الى ك ج كنسبة جيب قوس ه ا الى جيب قوس ا ج فنسبة جيب قوس ه ى الى جيب قوس ب ج كنسبة جيب قوس ه ا الى جيب قوس ج ا اعنى نسبة جيوب الميول كنسبة جيوب قسيها وان كان ا ى ا ه ربعين تكون نسبة جيب كل ميل الى جيب قوسها كنسبة جيب زاوية الى جيب القائمة وذلك ماردناه

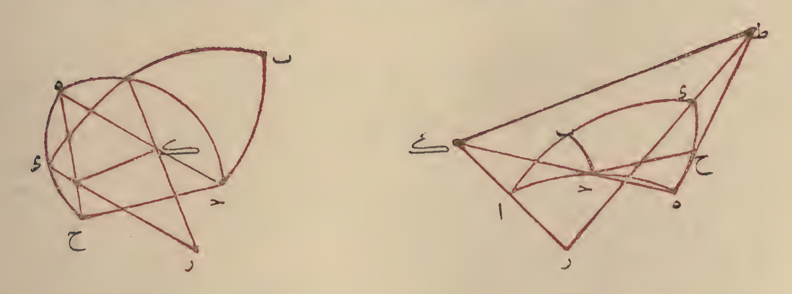
برهان اخر

استعمله ابو الفضل التبريزى فى شرح المجسطى وابو جعفر الخازن ايضا فى مطالب جزؤية ميل الميول الجزؤية والمطالع فى الكرة المستقيمة قبل ان اقامه هولاء الفضلاء مقام الشكل القطاع وتقريره على ما اورداه هكذا فليكن مثلث ا ب ج من القسى العظام وفيه زاوية ب قائمة ويخرج ضلعى ا ب ا ج الى ان يتم الربعان عند نقطتى ى ه ونرسم على قطب ا قوس ى ه ونخرجه ونخرج ب ج الى ان يتلاقيا عند ط فيكون ط قطب دائرة ا ز ونخرج من مركز الكرة وهو ز انصاف اقطار عليها ز ط ز ب ز ه ز ى ولكون ط ى ط ب ربعين تكون زاويتا ط ز ى ط ز ب قائمتين و ط ز عمودا على سطح دائرة ا ى ويخرج من نقطة

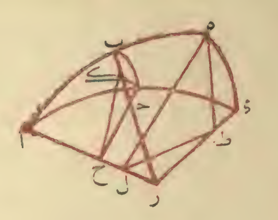
المدارين قائمتين عليه على قوائم ويكون كل واحد منهما فصلا مشتركا بين سطحى مداريهما وبين سطحى دائرتيهما العظيمتين اعنى هط فصل مشترك بين مدار هم ودائرة هء و حك فصل مشترك بين مدار حن ودائرة حب ولكون نقط ءَ طَ رَ فى سطحى دائرة ءه اء يكون خط ءطر مستقيما وهو نصف قطر الكرة وكذلك نقط بكر تقع على خط بر المستقيم وهو نصف قطر الكرة فيكون كل واحد من العمودين جيب القوس من المدار وللقوس من العظيمة اعنى هط جيب قوس هم وجيب قوس هء و حك جيب قوس حن وجيب قوس حب ولكون نسب جيوب القسى المتشابهة من الدوائر المختلفة الى انصاف اقطارها متساوية تكون نسبة هط جيب قوس هم الى هل نصف قطر المدار كنسبة حك جيب قوس حن الى حح نصف قطره ولان هط جيب قوس هء و هل جيب قوس ها و حك جيب قوس حب و حح جيب قوس حا تكون نسبة جيب قوس هء الى جيب قوس ها كنسبة جيب قوس حب الى جيب قوس حا اعنى نسبة جيب كل ميل الى جيب قوسه كنسبة جيب ميل آخر الى جيب قوسه وكنسبة جيب زاوية اَ الى جيب القائمة اعنى نصف القطر وذلك اذا كانا اء اه ربعين وذلك ما اردناه

برهان اخر وهو لأبى الوفاء البوزجانى

نعيد مثلثى ابح اءه على ان زاوية اَ فيهما متساوية وزاويتى بَ ءَ قائمتان اما على الاتصال اوعلى الانطباق عند اَ ونفصل من قوس هء العظمى



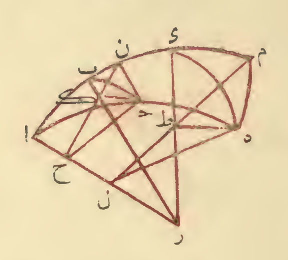
ءح مساوية لبح الصغرى ونرسم حح على الاستقامة ولكون سطحى



وتقرير البرهان يكون كما مروان فرضنا فى هذه الصورة اه اى ربعين وقعت نقطة ل على نقطة ز اعنى المركز فتكون نسبة جيب قوس ب ح الى جيب قوس ح ا كنسبة جيب زاوية ا الى جيب الزاوية القائمة

﴿ برهان آخر ايضاً للأمير ابى نصر ﴾

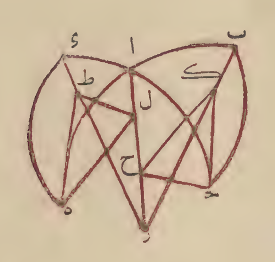
نعيد مثلثى ا ح ب ا ه ى من القسى العظام ونجعل زاوية ا مشتركة وزاويتا ب ى قائمتين ونرسم على قطب ا ببعد قوس ا ح قوس ح ن وببعد قوس ا ه قوس ه م فيكونان من مدارين متوازيين لكونهما على قطب واحد ولكونهما بين عظيمتى اه اى المارتين بقطبيهما تكونان متشابهتين كما تبين فى كتاب الاكر لثاؤذوسيوس ويقوم سطحاهما على سطوح العظام المارة بقطبيهما على قوائم ويكون مركز المدارين على



محور از ويخرج من نقطتى ح ن فى سطح مدار ن ح خطى ح ح ن ح الى مركز المدار وهو نقطة ح فيكونان نصفى قطرين له ولكون ا ح عمودا على سطح المدار تكون زاويتا ن ح ا ح ح ا قائمتين وايضا نخرج من نقطتى ه م نصفى قطرى ه ل م ل لمدار ه م فان ل مركز المدار ويخرج من نقطتى ه ح عمودى ه ط ح ك فى سطحى مداريهما على الفصل المشترك بين المدارين ودائرة اى وهما خطا م ل ن ح فيكونان عمودين على سطح دائرة اى لكون سطحى

جيب قوس ب ح الى جيب قوس ح ا كنسبة جيب قوس د ه الى جيب قوس ه ا

برهانه نخرج من مركز الكرة وهو نقطة ز انصاف اقطار عليها زب زا زد وكل واحد منها فصل مشترك بين دائرتين من هذه الدوائر كما هو معلوم ونخرج من نقطة ح فى سطح دائرة حب عمود حك على بز الذى هو الفصل المشترك بين عظيمتى حب ب ه ولكون سطح دائرة ب ح على سطح ب ه على قوائم يكون حك عمودا على سطح دائرة ب ه وايضا نخرج من ه فى سطح دائرة ه د عمود ه ط على د ز ويكون عمودا على سطح دائرة د ح كما ونخرج من نقطة ح ايضا فى سطح دائرة ا ح على ا ز الفصل المشترك عمود ح ح ونصل ك ح فى سطح دائرة ب ه فيحدث مثلث ح ك ح وتكون زاوية

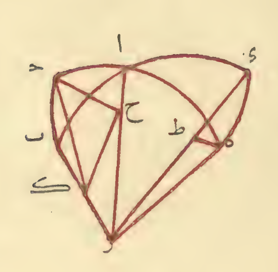


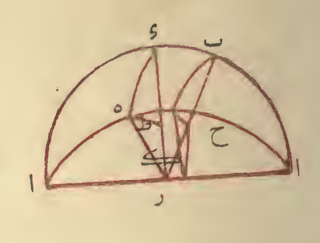


ك منه قائمة ونخرج ايضا من نقطة ه فى سطح دائرة ا على ا ز عمود ه ل ونصل ط ل فيحدث مثلث ه ط ل وتكون زاوية ط منه قائمة ففى مثلثى ح ك ح ه ط ل ضلعا ح ح ط ل فى سطح دائرة واحدة هى دائرة ح د عمودان على ا ز

اما ح ح فلانا فرضناه عمودا واما ط ل فبحكم المقدمة المذكورة وايضا ضلعا ح ك ه ل عمودان على ا ز وهما فى سطح دائرة ب ه فلذلك تكون زاويتا ح ل متساويتين وكانت زاويتا ك ط قائمتين فمثلثا ح ك ح ه ط ل متشابهان ونسبة ح ك جيب قوس ح ب الى ح ح جيب قوس ح ا كنسبة ه ط جيب قوس د ه الى ه ل جيب قوس ا ه وذلك ماردناه وان جعلنا المثلثين متطابقين يصير الشكل هكذا

نسبة جيب قوس ل م الى جيب قوس ل ا كنسبة جيب قوس ب ج الى جيب قوس ج ا وقد جرت العادة فى امثـال هذه المثلثات بان تسمى قوس ب ج ميل قوس ا ج وهو حصّة قوس ا ج من غاية ميل دائرة ا ه عن دائرة ا ء الذى يكون بقدر زاوية ا وان قيس قوس ب ج الى قوس ب ا سميت بذلك الاعتبار ميلا ثانيا لها وابو الريحان يسميها عرضـا لها فقوس ب ج ميل اول لقوس ا ج وميل ثان لقوس ا ب اوميل لتلك وعرض لهذه ونسبة جيوب الميول بعضها



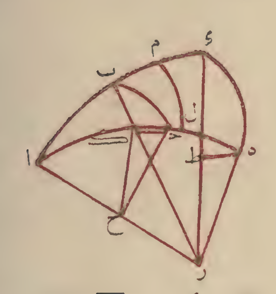


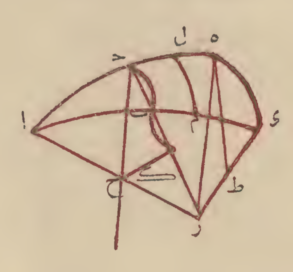
الى بعض كنسبة جيوب قسيها بعضها الى بعض فنسبة جيب كل ميل الى جيب قوسه كنسبة جيب ميل آخر الى جيب قوسه وان لم ينطبق مثلث ا ب ج على مثلث ا ه ء وتساوت زاوية ا فيهما وكانت زاويتا ب ء قائمتين كان الحكم ثابتا وهذه صورة الشكل على ذلك التقدير فقد بان من ذلك ان نسبة جيب وتر الزاوية المتساوية الى جيب وتر القائمة فى جميع المثلثات الحادثة من القسى العظام التى تتسـاوى احدى زواياها ويكون فى كل واحدة زاوية قائمة نسبة واحدة لكونها جميعا كنسبة جيب الزاوية المتسـاوية الى جيب القائمة وهذا البرهان على طريقة ابى نصر وابى الوفاء وان كانت العبارات مختلفة

﴿ طريق اخر للأمير ابى نصر ﴾

فى تقرير البرهـان على هذا المطلوب طريق آخر وهو انه جعل المثلثين غير منطبق احدهمـا على الآخر على وجه تكون القائمتـان فى جهة واحدة والمتسـاويتان على التقابل فليتصل مثلثـا ا ب ج . ا ه ء على زاوية ا وهى نقطة التقاطع بين قوس ب ه ج ء ولتكن زاويتا ب ء قائمتين اقول فنسـبة

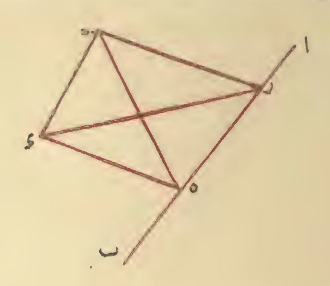
برهانه نخرج قوسى اب اح الى ان يتم البرهان عند نقطتى ء ه ونرسم ء ه من العظام فهو مقدار زاوية ا وليكن ر مركز الكرة فيخرج منه انصاف اقطار هى را رب رء ره ويكون ره عموداً على را لكون اه ربعا و را فصل مشترك لدائرتى اء اه ونخرج من نقطة ح عمود حح على ار





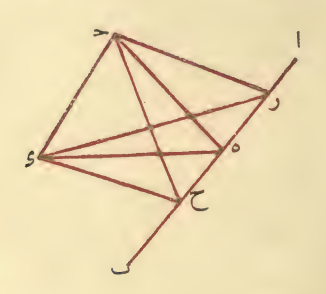


ويكون فى سطح دائرة احه وهو جيب قوس اح ولكون ه‍ر حح عمودين فى سطح واحد على ار يكونان متوازيين ويخرج من نقطتى ح ه عمودى ه‍ط حك فى سطح دائرتى هء حب على نصف قطرى ءر بر اللذين احدهما فصل مشترك لدائرتى حب اء فيكونان عمودين على سطح دائرة اء لكون سطحى هء بح قائمتين على سطح اء على ما تبين فى كتاب الاصول لاقليدس وظاهر ان عمود ه‍ط هو جيب قوس هء التى هى قدر زاوية ا وعمود حك جيب قوس حب واذا وصلنا بين موقعى عمودى حك حح لخط كح كان عموداً على ار بحكم المقدمة فيكون فى مثلثى حكح ه‍ط‍ر ه‍ط حك متوازيين لكونهما عمودين على سطح واحد و ه‍ر حح متوازيين لما مر فزاويتا ط‍ه‍ر كحح متساويتين لمابين فى كتاب الاصول وزاويتا ه‍ط‍ر حكح قائمتان ولذلك يكون المثلثان متشابهين وان نشاء قلنا و كح طر متوازيان بحكم المقدمة فمثلثا ه‍ط‍ر حكح متشابهان لتوازى اضلاعهما كل لنظيره فتكون نسبة حح جيب قوس اح الى ه‍ر نصف القطر وهو جيب زاوية ب القائمة كنسبة حك جيب قوس بح الى ه‍ط جيب ه‍ر اعنى جيب زاوية ا وبالابدال جيب قوس اح الى جيب قوس بح بجيب القائمة الى جيب زاوية ا وذلك ماأردناه وظاهر منه انا ان فرضنا قوسا اخرى من العظام تخرج من نقطة اخرى غير ح كنقطة ل لجيب يقوم على دائرة اء على قوائم كانت



فى ذلك السطح فزاويتا حءه حءر قائمتان وكذلك زاوية حهر ولكون حر وترا لقائمتى حءر حهر يكون مربعه مساويا تارة لمربعى حء ءر وتارة لمربعى حه هر، ومربع حه مساو لمربعى حء ءه فمربعا حء ءر مساويان لمربعات حء ءه ءر وتلقى مربع حء المشترك يبقى مربع ءر مساويا لمربعى ءه هر فاذن ءه عمود على اب وذلك ما اردناه

برهان آخر عليه لابى الريحان نعيد الشكل ونفصل من هب هح مساويا له ر ونصل ءح حر فيكون فى مثلثى حهر حهح ضلعا حه هر مساويان لضلعى حه هح وزاويتا ه قائمتان فحر مساو لحح وفى مثلثى حءر حءح وترا حر حح متساويان وعمود حء مشترك فءر ءح متساويان وفى مثلثى رءه حءه ضلعا ءر ءح متساويان



وكذلك ضلعا هر هح وضلع ءه مشترك فزاوية ءهر مساوية لزاوية ءهح فاذن هما قائمتان وذلك ما اردناه ولنشتغل ببيان المطلوب

الشكل المغنى ليكن مثلث ابح من القسى العظام وفيه زاوية ب قائمة فنقول نسبة جيب ضلع اح وتر القائمة الى جيب حب وتر زاوية ا كنسبة الجيب الاعظم اعنى نصف القطر وهو جيب القائمة الى جيب زاوية ا

﴿ الفصل الخامس ﴾

﴿ فى الشكل المغني وشرح فروعه وانواعه ﴾

اصل دعاويه ان نسب جيوب اضلاع المثلثات الحادثة من تقاطع القسى العظام فى سطح الكرة كنسب جيوب الزوايا الموترة بها وقد جرت العادة ببيان هذه الدعوى اولا فى مثلث القائم الزاوية وقد ذهبوا فى اقامة البرهان عليها مذاهب جمعها الاستاذ ابو الريحان البيرونى فى كتاب له سماه بمقاليد علم هيئات مايحدث فى بسيط الكرة وغيره ويوجد فى بعض تلك الطريق تفاوت فاخرت منها ماكان اشد مباينة ليكون هذا الكتاب جامعا مع رعاية شرط الايجاز وابتدأت بطرق الأميرأبى نصرعلى بن عراق فان الغالب على ظن أبى الريحان انه السابق الى الظفر باستعمال هذا القانون فى جميع المواضع وان كان كل واحد من الفاضلين ابى الوفاء محمد بن محمد البوزجانى وابى محمود حامد بن الخضر الخجندى ادعيا السبق ايضا فيه والامير ابو نصر قدّم على بيانه فى بعض كتبه مقدمة ليست بضرورية فى هذا الشكل وان كانت مفيدة وهى هذه

﴿ مقدمة ﴾

اذا تقاطع سطحان مستويان على غير قوائم وفرضت نقطة على احدهما واخرج منها عمودان احدهما على السطح الآخر والآخر فى ذلك السطح على الفصل المشترك بين السطحين ووصل بين موقعى العمودين بخط مستقيم كان ذلك الخط ايضا عمودا على الفصل المشترك فليتقاطع السطحان على اب وهو الفصل المشترك بينهما ولتكن النقطة المفروضة فى احدهما ح وليخرج منها عمود حد على السطح الآخر وعمود حه على الفصل المشترك وليوصل ده فاقول انه عمود على اب

برهانه يفرض على خط اب نقطة ز كيف اتفقت ونصل حز دز فلكون حد عمودا على السطح الذى فيه د وكل واحد من د ز ده

اضلاعه اصغر من الربع واكثر زواياه حادة وذلك اما باعتبـار الاضلاع فيكون مثلثـا ضلعـان منه اصغر من الربع والثـالث اما اصغر او اعظم او مسـاو للربع وهذه ثلثة واما باعتبـار الزوايا فيكون مثلثـا زاويتان منه حادتان والثالثة اما حادة واما قائمة واما منفرجة وهذه ايضا ثلثة والثلثة الاولى تستلزم الثلثة الاخيرة من غير عكس فان المثلث الذى يكون ضلعان منه اصغر من الربع والثالث مساويا للربع والذى يكون ضلعان منه اصغر والثـالث اعظم يكون فيهمـا بالضرورة حادتان ومنفرجة والذى يكون كل ضلع منها اصغر من الربع يكون فيه حادتان وتاليه يجوز ان تكون حادة او قائمة او منفرجة

وايضا المثلث الذى تكون زواياه حادات او يكون فيه حادتان وقائمة يكون بالضرورة كل ضلع منه اصغر من الربع والذى يكون فيه حادات ومنفرجة يمكن ان يكون بحسب الاضلاع احد الثلثة الاولى ويمكن ان يكون على وجهين غيرهما اما ان يكون ضلعان منه اعظم من الربع والباقى اصغر منه وان يكون ضلعه ربعا وضلع اصغر وضلع اعظم واذا كان كذلك كفانا الكلام فى مثلث حاد الزوايا ومثلث قائم الزاوية ومثلث منفرج الزاوية ولم نحتج الى ماعداها



واذ تقدم ذلك نقول قد علمت ان فى كل مثلث ستة اشيآء هى اضلاعه وزواياه واذا عرفت مقادير ثلثة من هذه الستة أىّ ثلثة كانت عرفت الباقية بالطريق المعروف فى المقادير الاربعة المتناسبة وفى المثلث القائم الزوايا تكون الزوايا القائمة احدى الثلثة المعلومة ولذلك لانحتاج منها الا الى معرفة شيئين غيرها اما فى المسئلتين الاخريين فلا بد من معرفة ثلثة اشيآء فالآن وجب علينا ان نبين وجوه التناسب وللمتأخرين فى ذلك قانونان كليان يعرف احدهما بالشكل المغنى عن القطاع فانه يقوم فى معرفة جميع القسى المجهولة مقام الشكل القطاع و يغنى عن اختلاف دعاويها وعن وجوه النسبة المؤلفة فيها والثانى يعرف بالشكل الظلى وهو ايضا فى معظم المطالب يقوم مقام القطاع و يغنى عما يغنى المغنى عنه ويكون العمل به فى بعض المواضع اسهل من العمل بالمغنى وفى بعضها بالضد واذا حقق امر هذين الشكلين وجدا راجعين الى التركيب والتفصيل الواقعين وانا اوردهما على ما قرره افاضل هذا العلم ان شآء الله تعالى

واحكام الاقطاب اجمالا ان الضلع المطلوب قطبه ان كان بين قائمتين فقطبه على نقطة الزاوية الموترة به وان كان على احد حدّيه قائمة كان قطبه على الضلع الآخر للقائمة داخلا ان كان الضلع اعظم من الربع او خارجا ان كان اصغر وان كان الضلع بين منفرجتين كان القطب داخل المثلث وان كان بين حادتين او بين حادة وغيرها كان القطب خارجا

الفصل الرابع

في الاشارة الى كيفية التوصل من المعلومات الى المجهولات في هذه المثلثات

قد تبينّ فيما مرّ ان العلم بمثلث من المثلثات الثمانية الحادثة في سطح الكرة من تقاطع ثلث دوائر عظام يستلزم العلم بالمثلثات السبعة الباقية وتبين ايضا ان انواع التقاطعات خمسة فقط

فنقول الآن اما النوع الاول من التقاطعات وهو ان تكون الزوايا قوائم والاضلاع ارباعا فلا يكون فيه شيء من الاضلاع والزوايا مجهولة فلا يتصور فيه توصل من معلوم الى مجهول

واما النوع الثاني وهو الذى يحدث منه اربع مثلثات يكون لكل واحد ضلعان ربعين وواحد اصغر وزاويتان قائمتان وواحدة حادة واربع مثلثات اخر يكون لكل واحد ضلعان ربعين وواحد اعظم وزاويتان قائمتان وواحدة منفرجة فيكون في كل مثلث منها ضلعان هما ربعان وزاويتان هما قائمتان معلومة ويبقى ضلع وزاوية مقدارهما شيء واحد لا يكون لها تعلق بما هو معلوم فان كان ذلك الشيء معلوما لم يبق فيها مجهول وان كان مجهولا لم يمكن ان يصير بما هو فيها معلوم معلوما فلا يقع في هذا النوع ايضا توصل من معلوم الى مجهول

واما الانواع الثلثة الباقية فهي التي اذا عرف فيها حال مثلث واحد من كل نوع عرف به حال باقي المثلثات ولنتكلم اولا من كل نوع في مثلث يكون اكثر



انواع المثلثات باعتبار الزاويا / انواع المثلثات باعتبار الاضلاع	الاضلاع ارباع	ضلعان ربعان والثالث اصغر	ضلعان ربعان والثالث اعظم	ضلع ربع والباقيان اصغر	ضلع ربع والباقيان اعظم	ضلع ربع وضلع اصغر وضلع اعظم	كل واحد من الاضلاع اصغر	ضلعان اعظم والثالث اصغر	ضلعان اصغر والثالث اعظم	كل واحد من الاضلاع اعظم
الزاويا كلها قوائم	واجب / واجب ب	م				ت				ع
قائمتان وحادة	ممتنع	واجب / واجب ب	م				ت			ع
قائمتان ومنفرجة	م ت	ع	واجب / واجب ب	م			ت			ع
قائمة وحادتان	م		ت			ع	واجب / ممكن	م	ت	ع
قائمة ومنفرجتان	م			ت			ع	واجب / ممكن	م ت	ع
قائمة و منفرجة وحادة	م			ت			ع	واجب / ممكن	م ت	ع
الزاويا كلها حادة	م		ت			ع	واجب / ممكن	م	ت	ع
حادة ومنفرجتان	م			ت			ع	واجب / ممكن	م ت	ع
الزاويا كلها منفرجة	م	ت		ع	واجب / ممكن	م	ت ع	ممكن / ممكن	ممتنع	واجب / ممكن
منفرجة وحادتان	م	ت	ع	واجب / ممكن	ممتنع	واجب / ممكن	ممكن / ممكن	ممكن / ممكن	واجب / ممكن	ممتنع

م كل مثلث احدى زواياه منفرجة والباقيتان حادتان كانت اضلاعه على احد خمسة اوجه
أ اما كل واحد منها اصغر من الربع ب او ضلعان اصغر والثالث ربع
ج او ضلعان اصغر والثالث اعظم د او ضلعان اعظم والثالث اصغر
ه او ضلع ربع وضلع اعظم منه وضلع اصغر والاوجه الباقية محالة
وتقع الاقطاب خارجا فليكن فى مثلث ا ب ج زاوية ا منفرجة والباقيتان
حادتان ويخرج ا ب ا ج الى ان يلتقيا عند د فيكون فى مثلث ب ج د منفرجة
الزوايا الثلث فيكون فيه ضلعان اعظم من الربع والثالث من اى جنس كان
جاز وان كان ب ج اصغر من الربع كانت نسبة ا ب ج على الوجه الاول
وان كان ب ج ربعا كان على الوجه الثانى وان كان ب ج اعظم من الربع كان
على الوجه الثالث وان كان احد ضلعى ب د ج د اصغر من الربع كان مثلث
ا ب ج على الوجه الرابع وان كان احد ضلعى ب د ج د ربعا كان على الوجه
الخامس



واما الاوجه المحال أ فان تكون الاضلاع ارباعا ب او ضلعان ربعان
والثالث اصغر ج او ضلعان ربعان والثالث اعظم فان ذلك يقتضى كون اكثر
الزوايا اوكلها قوائم د او تكون الاضلاع اعظم من الربع ه او ضلعان اعظم
والثالث ربعا فان ذلك يقتضى كون الزوايا منفرجة وحال الاقطاب ظاهر ونحن
وضعنا هذه الاحكام فى جدول حتى تعرف احوال بعضها بالقياس الى البعض
الاخر وهو هذا

ولكون زاوية آ حادة وضلعيه اصغر من الربع يكون وتره اعنى ب‍ح اصغر من الربع فتكون الاضلاع اصغر من الربع وحال الاقطاب ظاهرة

حَ كل مثلث تقع فيه حادة ومنفرجتان كان وتر المنفرجتين اعظم من الربع ووتر الحادة اصغر منه وقطب وتر الحادة يقع داخلا والقطبان الاخران يقعان خارجين فليكن فى مثلث ا ب ح زاوية آ حادة والباقيتان منفرجتين ويخرج ضلعى ا ب ا ح الى ان يلتقيا عند ءَ فيكون مثلث ب ء ح حادة الزوايا واضلاعها اصغر من الربع ففى مثلث ا ب ح يكون ضلعا ا ب ا ح اعظم من الربع وضلع ب ح اصغر وحال الاقطاب ظاهرة

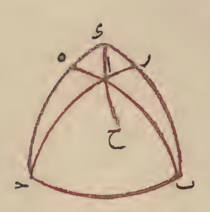


طَ كل مثلث زواياه الثلث منفرجات كان ضلعان منه اعظم من الربع والثالث يجوز ان يكون اعظم وان يكون مساويا وان يكون اصغر والاقطاب تقع داخله وليكن المثلث ا ب ح فلو كانت اضلاعه جميعا اصغر من الربع وضلعان منه اصغر والثالث من اى جنس كان او ضلع اصغر وضلع ربعا وضلع اعظم



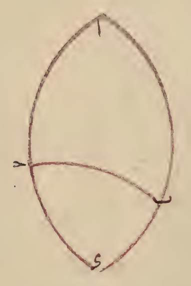
لوقعت فيه حادتان ولو كان الضلعان متساويين للربع لوقعت فيه قائمتان وكلاهما محال فبقى ان يكون فيه ضلعان اعظم من الربع والثالث كيف كان خارجا وحال الاقطاب ظاهرة

و يخرج ا ب ا ح الى ان يلتقيا عند د و يكون فى مثلث ب ح د قائمة هى



زاوية ب وحادتان و تكون اضلاعها اصغر من الربع فيكون فى مثلث ا ب ح
ضلعا ا ب ا ح اعظم من الربع وضلع ب ح اصغر و تكون زاوية ب قائمة
و ب ح اصغر من الربع يكون قطب ا ب على ب ح خارجا ولكون ا ب
اعظم من الربع يكون قطب ب ح على ا ب داخلا ولكون زاوية ا حادة
يكون قطب ا ح خارجا

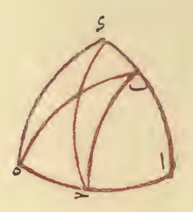
ز كل مثلث تكون زواياه كلها حادة فاضلاعه اصغر من الربع واقطابه
تقع خارجا عن المثلث فليكن المثلث ا ب ح وليخرج من نقطتى ب ح قوسان
قائمتان على ب ح متلاقيان عند د فهو قطب ب ح فيكون ب د ربعا
ونرسم عظيمة تمر على د ا دائرة د ا ح فلوكان ب ا ربعا كان ب قطب
د ح وكانت زاوية ب ا ح قائمة وكنا قد فرضنا ب ا ح حادة هذا خلف



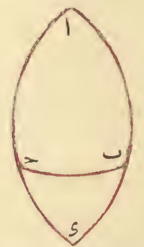
وان كان ب ا اعظم من الربع كان فى مثلث ب د ا ضلع د ب ربعا وضلع ب ا اعظم
منه وضلع د ا اصغر فتكون زاوية ب د ا منفرجة وزاوية ب ا د حادة
فتكون ب ا ح منفرجة وكنا قد فرضنا ب ا ح حادة هذا خلف فاذن لا يكون
ضلع ب ا الا اصغر من الربع و بمثله يتبين ان ضلع ا ح ايضا اصغر من الربع



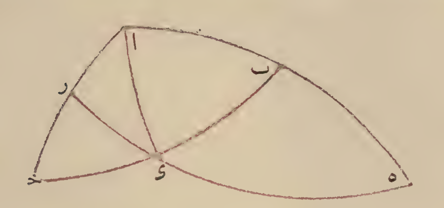
دَ كل مثلث يكون فيه قائمة وحادتان يكون ضلع منه اصغر من الربع والاقطاب خارج المثلث قطب كل ضلع للقائمة على الضلع الاخر فلتكن زاوية اَ من مثلث ا ب ح قائمة والباقيتان حادتان واذا اخرجنا من حَ قوسا عظيمة يقوم على ا ح على قوائم لاقت ا ب عند دَ وهى قطب ا ح فيكون ا د ربما و ا ب اصغر منه وكذلك تبين ان ا ح اصغر من ربع ولكون زاوية اَ قائمة وضلعى ا ب ا ح اصغر من الربع يكون ب ح اصغر من الربع وحال الاقطاب مستغنية عن البيان



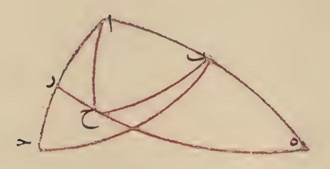
هَ كل مثلث يكون فيه قائمة ومنفرجتان يكون وتر المنفرجتين اعظم من الربع ووتر القائمة اصغر منه وقطبا ضلعين على ضلعى القائمة والثالث داخل المثلث فليكن فى مثلث ا ب ح زاوية اَ قائمة وزاويتا بَ حَ منفرجتين ويخرج ضلعى ا ب ا ح الى ان يتلاقيا عند دَ فيكون فى مثلث ب ح د قائمة وحادتين وتكون اضلاعها اصغر من الربع فيكون فى مثلث ا ب ح ضلعا ا ب ا ح اعظم من الربع وضلع ب ح اصغر من الربع وحال الاقطاب ظاهر



وَ كل مثلث فيه قائمة وحادة ومنفرجة يكون وتر الحادة اصغر من الربع والضلعان الباقيان اعظم من الربع و يكون قطب وتر الحادة على وتر المنفرجة داخلا وقطب وتر المنفرجة على وتر الحادة خارجا وقطب وتر القائمة ايضا خارجا فليكن فى مثلث ا ب ح زاوية اَ حادة وزاوية بَ قائمة وزاوية حَ منفرجة



م كل مثلث كان كل واحد من اضلاعه اعظم من الربع فزواياه منفرجة واقطابه تقع داخل المثلث فليكن المثلث ا ب ح و يخرج ضلعى ا ب ا ح الى ان يلتقيا عند ء ففى مثلث ب ح ء ضلع ب ح اعظم من الربع وكل واحد من



الباقيين اصغر منه ويلزم ان تكون زاوية ء منفرجة والباقيتان حادتان فاذن فى مثلث ا ب ح الزاويا منفرجة وحال الاقطاب ظاهرة وهذا آخر الانواع العشرة التى تكون بحسب اعتبار الاضلاع واما العشرة الثانية التى يعتبر فيها الزاويا فتفصيلها هذا



أ كل مثلث زاوياه قوائم فاضلاعه ارباع وكل زاوية تكون قطبا لوترها كما مر وهذا المثلث يكون ثمن سطح الكرة سوآء

ب كل مثلث يكون فيه حادة وقائمتان يكون ضلعا الحادة ربعين و وترها اصغر من الربع والزاوية الحادة تكون قطبا لوترها وقطبا ضلعيها يكونان على وترها خارج المثلث

ح كل مثلث يكون فيه منفرجة وقائمتان يكون ضلعا المنفرجة ربعين و وترها اعظم من الربع والزاوية المنفرجة قطب وترها وقطبا ضلعيها يكونان على وترها داخل المثلث وقد تبين مما مر حال هذه الانواع الثلثة

تكون جميع الاضلاع او بعضها ارباعا وعلى تقدير الوجه الرابع يلزم ان تكون جميع الاضلاع اصغر من الربع وعلى التقدير الخامس فان كانت القائمة ا يخرج من ب قوس به على قوائم فتلقى اج على ه خارج المثلث ويكون اه ربعا وكان اج اعظم من الربع هذا خلف وان كانت القائمة ب فصلنا من با بز ربعا ورسمنا من العظام زج فيكون ز قطب بج وزاوية زجب قائمة وكانت زاوية اجب حادة هذا خلف فاذن الوجوه الخمسة محالة

واما حال الاقطاب فان كانت فى المثلث قائمة ومنفرجتان كان قطب كل ضلع من ضلعى القائمة على الاخر وقطب وتر القائمة داخل المثلث وان كانت فيه قائمة ومنفرجة وحادة كان قطب وتر الحادة على وتر المنفرجة داخل المثلث وقطب وتر المنفرجة على وتر الحادة خارجا منه وقطب الضلع الباقى ايضاً خارجاً وان كانت حادة ومنفرجتان كان قطب وتر الحادة داخلا وقطبا الباقين خارجان يتبين الجميع بأدنى تأمل

ط كل مثلث احد اضلاعه اعظم من الربع والباقيان اصغر كانت الزاوية التى يوتره الضلع الاعظم منفرجة والباقيتان حادتين والاقطاب تقع خارجا فليكن فى مثلث ابج كل واحد من ضلعى اب اج اصغر من الربع وضلع بج اعظم اقول لتكن زاوية ا منفرجة لانها ان كانت قائمة او حادة وضلعاها اصغر من الربع كان وتر بج ايضاً اصغر منه وكانت اعظم هذا خلف

وايضا زاويتا ب ج تكونان حادتين فان ب لولم تكن حادة لكانت اما منفرجة اوقائمة فان كانت قائمة تفصل بد بقدر الربع فيكون د قطب اب ويخرج اب الى ان يصير ربعا عند ه ونرسم قوسى اى ده فتكونان ربعين واذا اخرجنا ده الى ز كانت از ربعا وقد فرضنا اج اقل من ربع هذا خلف وان كانت زاوية ب منفرجة وكانت زاوية ا منفرجة رسمنا على قطب اب دائرتين تمران بنقطتى ا ب كان القطب داخل المثلث ولتكن نقطة ح ويخرج اب الى ه ونرسم هح الى ز فيكون از ربعا لكون ا قطب هحز وكانت اج اقل من الربع هذا خلف وهكذا حكم زاوية ج وقد تبين حال الاقطاب مما ذكرنا

اصغر منه هذا خلف فاذن ثبت ان زاويتين من المثلث المذكور يجب ان تكونا حادتين والثالثة يجوز ان تكون احدى الزوايا الثلث فان المنفرجة والقائمة والحادة يجوز ان يكون لها اوتار اصغر من الربع واما ان قطب الاضلاع الثلثة يجب ان يقع خارجا فظاهر مما قلنا

ح كل مثلث يكون ضلعان منه اعظم من الربع والثالث اصغر منه كانت زاوياه على احد خمسة اوجه

الاول ان تكون قائمة ومنفرجتين

والثانى ان تكون قائمة ومنفرجة وحادة

والثالث ان تكون حادة ومنفرجتين

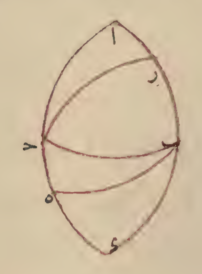
والرابع ان تكون منفرجة وحادتين

والخامس ان تكون الكل منفرجات والخمسة الاوجه الباقية تكون محالا

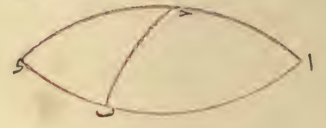


وليكن المثلث ا ب ح وليكن كل واحد من ا ب ا ح اعظم من الربع و ب ح اصغر وليلتق على ى فيكون كل واحد من الاضلاع مثلث ب ح ى اصغر من الربع فان كانت زاوية ى قائمة وزاويتا ب ح حادتين كان مثلث ا ب ح على الوجه الاول وان كانت احدى زاويتى ى ب ح ى ح ب قائمة والباقيتان حادتان كان مثلث ا ب ح على الوجه الثانى وان كانت زوايا مثلث ب ح ى كلها حادة كان مثلث ا ب ح على الوجه الثالث وان كانت احدى زاويتى ى ب ح ى ح ب منفرجة والباقيتان حادتان كان مثلث ا ب ح على الوجه الرابع وان كانت زاوية ى منفرجة كان مثلث ا ب ح على الوجه الخامس

واما الوجوه المحالة فاولها ان تكون الزاويا قوائم وثانيها ان تكون قائمتين وحادة وثالثها ان تكون قائمتين ومنفرجة ورابعها ان يكون الكل حادة وخامسها ان تكون قائمة وحادتين وذلك لان على تقدير الاوجه الثلثة الاولى يلزم ان

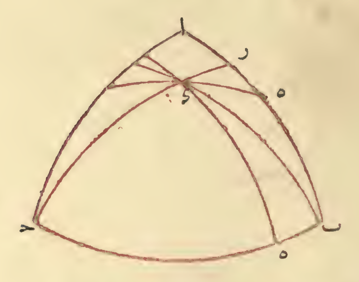


اعظم من الربع و اح ربعا و حب اصغر ويخرج اح اب الى ان يتلاقيا



عند ء ويحدث مثلث حبء ويكون فيه ضلعان اصغر من الربع وضلع
واحد ربعا فتكون زاويتا ح ء فيه حادتين وزاوية ب منفرجة ويلزم منه
ان يكون فى مثلث احب زاوية ا وزاوية ب حادتين وزاوية ح منفرجة
وبالوجه المذكور فى النوع الرابع تكون الاقطاب خارج المثلث

ز كل مثلث يكون كل واحد من اضلاعه اصغر من الربع كانت زاويتان
من زواياه حادتين والثالث يمكن ان يكون من كل واحد من الانواع الثلثة وتقع
الاقطاب خارج المثلث فليكن المثلث ابح فان لم يكن فيه حادتان كان فيه
اما قائمتان او منفرجتان واما قائمة ومنفرجة وكلها محال اما الاول فلانه لوكانت
زاويتا ب ح مثلا قائمتين كان ا قطب بح ويكون اب اح ربعين وقد
فرضناهما اصغر هذا خلف واما الثانى فلانهما لوكانتا منفرجتين واقمنا على خط
بح من نقطتى ب ح قوسى بى ىح على زوايا قائمة فيلتقيان عند ء
وهو قطب بح واذا جعلنا ب قطبا ورسمنا ببعد ىب دائرة قطعت اما ضلع
با واما ضلع بح على نقطة ه ويكون به ربعا وقد فرضنا كل واحد
من با بح اصغر من ربع هذا خلف



واما الثالث فلان زاوية ب ان كانت قائمة وزاوية ح منفرجة ورسمنا
دائرة تمر بقطب دائرة بح و بنقطة ح وليكن منها حى وهى تمر لامحالة بضلع
با فلتمر بنقطة ز ويكون ز قطب دائرة بح فيكون بز ربعا وكانت با

ونرسم على قطب ب ببعد ضلع المربع اى فتكون زاوية ب اى قائمة وتكون زاوية ب ا ح حادة وبمثله تبين ان زاوية ب ايضا حادة ولكون زاوية ب اى قائمة يجب ان يمر اى بقطب دائرة اب فقطب دائرة اب يكون



خارجا من المثلث وايضا ان مرت قوس من العظام بقطب دائرة ب ح ى بنقطه ب وقعت خارج المثلث لكون زاوية ب حادة فكذلك يكون قطب دائرة ب ح ايضا خارجاً وقس عليه حال قطب ا ح

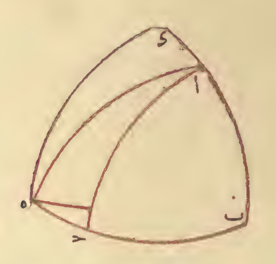
ه كل مثلث يكون احد اضلاعه ربعا والباقيان اعظم منه كانت الزوايا كلها منفرجة والاقطاب داخل المثلث فليكن المثلث اب ح وليكن اب ربعا وكل واحد من ا ح ب ح اكثر منه فلتخرج ح ب ح ا الى ان يلتقيا عند نقطة ى ويحدث مثلث ى اب فيكون ضلع ب ا منه ربعا وضلعا ب ى اى اصغر منه فيكون لما مر زاوية ى منفرجة و ح مساوية لها فهى ايضا منفرجة وزاويتا ى اب ى ب ا حادتان فتكون زاويتا ح اب ح ب ا منفرجتين



واذا توهمنا قوسين تخرجان من نقطتى اب قائمتين على اب على قوائم فلا محالة يتقاطعان داخل المثلث وقطب اب يكون عند نقطة تقاطعهما فهو داخل المثلث وكذلك القطبان الاخران

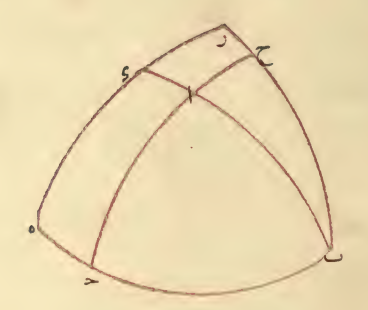
و كل مثلث يكون احد اضلاعه ربعا واخر اعظم منه والباقى اصغر كانت الزاوية التي يوترها الضلع الذى هو اعظم من الربع منفرجة والباقيتان حادتين وتقع الاقطاب خارجا من المثلث فليكن المثلث اب ح وليكن اب

من العظام على مابين ثاوذوسيوس فى الشكل الحادى والعشرين من المقالة الاولى من كتابه فى الاكر ولكون ه قطبا ب د يكون ه ا ربعا كما تبين فى الشكل السابع عشر من المقالة المذكورة و ا ح ان كان ربعا كان ا قطبا ح ه لكن قطب



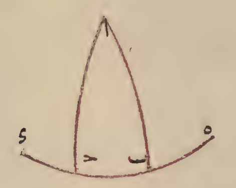


ح ه هو د هذا خلف وان كان ا ح اعظم من الربع نفصل منه ا ر بقدر الربع وترسم على قطب ا قوس ه ر من العظام فتكون زاوية ا ه ر قائمة وكانت زاوية د ه ب قائمة هذا خلف فاذن ا ح اصغر من الربع واما ان كانت زاوية ا ب ح حادة اخرجنا ضلعى ب ا ب ح الى ان يصيرا عند د ه ربعين ورسمنا على قطب ه ربع ب ر وتممنا مثلث ب ر ه من الارباع ثم نخرج ح ا الى

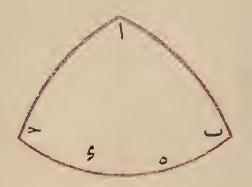


ان يخرج من المثلث على ح فان وقعت نقطة ح على احد ضلعى ب ر ر ه كان ح ه اصغر من الربع و ح ا اصغر كثيرا منه كما مر وان وقعت على زاوية ر كان ح ح ربعا و ح ا اصغر منه وذلك ما اردناه وبعد تقديم هذه المقدمة نقول فليكن المثلث الموصوف ا ب ح وليكن ا ب ربعا وكل واحد من ا ح ح ب اصغر منه فان كانت زاوية ح قائمة او حادة كان ا ب اقل من الربع وقد فرضناه ربعا فاذن ح منفرجة ونخرج ب ح الى ان يصير ب د ربعا

منه فتكون نقطة أ قطبا لدآئرة ب ح كامر وتكون زاويتا ب ح قائمتين لماتبين
فى الشكل السادس عشر من المقالة الاولى من الاكر ولكون ب ح اقل من الربع



تكون زاوية أ حاده واذا اخرجنا قوس ب ح فى جهتيها وجعلنا ب د
مساوية لب ا كان د قطب دآئرة ا ب وايضا اذا جعلنا ح ه مساوية ح ا
كان ه قطب دآئرة ا ح ح كل مثلث يكون ضلعاه ربعين والثالث اعظم
كانت زاويتان فيها قائمتين وواحدة وهى التى يوترها الضلع الذى هو اعظم
من الربع منفرجة ونقطة الزاوية المنفرجة قطبا لوترها وقطبا الضلعين الاخرين
على وتر المنفرجة داخل المثلث فليكن المثلث ا ب ح وليكن ا ب ا ح ربعين
و ب ح اعظم منه فيكون أ قطبا لب ح كامر وزاويتان ب ح قائمتين
ولكون ب ح اعظم من الربع تكون زاوية أ منفرجة ونفصل ب د بقدر الربع
فيكون د قطبا لضلع ا ب وايضا نفصل ح ه بقدر الربع فيكون ه
قطبا لضلع ا ح



د كل مثلث يكون احد اضلاعه ربعا والباقيان اصغر منه كانت الزاوية
الموترة بالربع منفرجة والاخريان حادتان واقطاب الاضلاع خارجة من المثلث
ولنقدم على بيانه مقدمة هى ان نقول كل زاوية قائمة او حادة كان ضلعاها اصغر
من الربع فوترها ايضا اصغر من الربع فلتكن زاوية ا ب ح قائمة وكل واحد
من ا ب ب ح اقل من الربع ونرسم وتر ا ح فنقول هو ايضا اقل منه
برهانه نخرج ب ا ب ح الى ان يصير عند نقطتى د ه ونرسم د ه ونخرج ا ه

والثالثة حادة ح اثنتـان قائمتان والثالثة منفرجة ى احديها قائمة والباقيتان حادتان ه احديها قائمة والباقيتان منفرجتان و احديها قائمة والاخرى حادة والثالثة منفرجة ز كلها حادة ح احديها حادة والباقيتان منفرجتان ط كلها منفرجة م احديها منفرجة والباقيتان حادتان وانواع التقاطع المقتضية لحدوث هذه المثلثات ايضا خمسـة ا الذى يحدث منه النوع الاول وحده ب الذى يحدث منه النوع الثانى والنوع الثـالث ج الذى يحدث منه الرابع والخامس والسادس ى الذى يحدث منه السـابع والثامن ه الذى يحدث منه التاسـع والعاشر وكيفية تلازم هذه المثلثات وحدوثها من هذه الانواع الخمسة يتبين بما قدمناه

الفصل الثالث

فى احكام انواع المثلثات واعتبارها بالخصوص والعموم

ولنبدأ بتفصيل انواع العشرة الاولى ا كل مثلث تكون اضلاعه ارباعا تكون زواياه قوائم بالضرورة وقطب كل ضلع نقطة الزاوية التى يوترها ذلك الضلع وليكن المثلث ابج فلكون البعد بين نقطة ا و بين كل واحدة من نقطتى ب ج اعنى وترى ضلعى اب اج يقدر ضلع المربع الواقع فى دائرة عظيمة يقع فى سطح الكرة فان نحن رسمنا على قطب ا بهذا البعد دائرة عظيمة كان قوس بج منها وقد تبين ذلك فى الشـكلين السابع عشر والثامن عشر

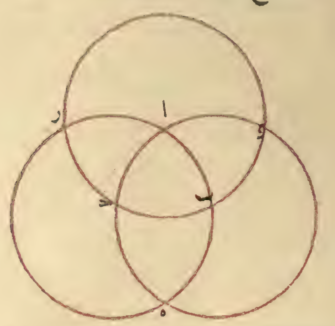


من المقالة الاولى من كتاب الاكر وكذلك القول فى سائر الزوايا والاضلاع ولكون كل ضلع ربعا كانت الزاوية المتقـابلة لها قوائم ب كل مثلث يكون ضلعـاه ربعين والثالث اصغر من الربع يكون زاويتين فيه قائمتين وواحدة حادة وهى تكون قطبا لوترها ويقع قطبا الضلعين اللذين يوتران القائمتين على وتر الحادة خارجين من المثلث فليكن المثلث ابج وليكن اب اج ربعين و بج اصغر

ذلك فى سائر المثلثات فاذن اذا عرفنا حال مثلث واحد عرفنا حال المثلثات الثمانية بأسرها واعلم ان حصر انواع المثلثات يكون اما باعتبار الاضلاع واما باعتبار الزاويا واما باعتبار الاضلاع فى كونها مساوية للربع اواقل او اكثر فتكون عشرة انواع هى هذه اَ الاضلاع ارباع تامة بَ ضلعان ربعان والثالث اصغر من ربع حَ ضلعان ربعان والثالث اعظم ءَ ضلع ربع والباقيان اصغر هَ ضلع ربع والباقيان اعظم وَ ضلع ربع واخر اصغر والثالث اعظم زَ كل واحد منها اصغر من الربع حَ اثنان اعظم منه والثالث اصغر طَ اثنان اصغر منه والثالث اعظم مَ كل واحد منها اعظم من الربع وهذه الانواع تحصل من خمسة انواع من التقاطع فان المثلث اذا كان من النوع السابع اعنى يكون كل واحد من اضلاعه اصغر من الربع كانت المثلثات الثلثة الواقعة معه فى نصف سطح الكرة جميعا من النوع الثامن اعنى يكون ضلعان منه اعظم من الربع والثالث اصغر وذلك لان المثلث الاول يوافق كل واحد من الثلثة الباقية فى ضلع فيكون فى كل واحد منها ضلع اصغر من الربع ويكون الضلعان الباقيان تماما الباقيين من كل واحد من الثلثة الباقية فيكون فى كل واحد منها ضلعان كل واحد منهما اعظم من الربع وبهذا البيان يتبين انه ان كان المثلث المفروض من النوع الثامن كان اثنان من الثلثة الباقية ايضا من ذلك النوع وواحد من النوع السابع فاذن هذان النوعان اعنى السابع والثامن متلازمان ويحدثان من نوع واحد من التقاطع وايضا النوع الرابع والنوع الخامس والنوع السادس متلازمة ويكون من المثلثات الاربعة واحد من الرابع وواحد من الخامس واثنان من السادس وايضا النوع التاسع والنوع العاشر متلازمان ويكون من المثلثات اثنين من كل نوع منهما والنوع الاول لا يلازم غيره بل ينعكس على نفسه لتشابه المثلثات الاربع وتساويها فيه فاذن انواع التقاطع خمسة اَ الذى يحدث منه مثلثات من النوع الاول بَ الذى يحدث منه مثلثات من النوع الثانى والثالث حَ الذى يحدث منه مثلثات من النوع الرابع والنوع الخامس والنوع السادس ءَ الذى يحدث منه مثلثات من النوعين السابع والثامن هَ الذى يحدث منه مثلثات من النوعين التاسع والعاشر واما حصر المثلثات باعتبار الزوايا فى كونها قوائم اوغير قوائم فعشرة ايضا هى هذه اَ الزوايا الثلث قوائم بَ اثنتان قائمتان

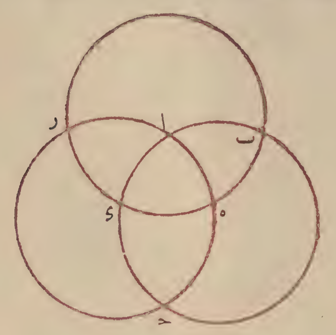


دوآئر عظام متقاطعة وكما ان الدآئرتين المتقاطعتين يقسمان سطح الكرة باربعة اقسام فالثالثة المقاطعة انما تقسم كل قسم الى قسمين ويصير الجميع ثمانى مثلثات فاذن كل مثلث يحدث معه سبع مثلثات فليكن المثلث ا ب ح واذا اتممنا دوآئر



اضلاعه وهى دآئرة ا ب ه ز ودآئرة ا ح ه ء ودآئرة ء ب ح ز حدثت سبع مثلثات اخرى هى مثلثات ا ء ب ء ب ه ب ه ح ح ه ز ا ح ز ا ء ز ء ه ز وجميع سطح الكرة قدانقسم بهذه المثلثات الثمانية وقد وقع عليهاست تقاطعات واثنى عشر قوسا وثمانية مثلثات واربع وعشرون زاوية وكما ذكرنا فى قسمة سطح الكرة بالقطاعات تكون ههنا ايضا المثلثات الاربعة الواقعة فى نصف من السطح شبيهة ومساوية للاربعة التى تقع فى النصف الاخر كل واحد لنظيره مثلا مثلث ا ح ز يشبه ويساوى مثلث ء ه ب وذلك لان ضلع ا ز يساوى ضلع ب ه وضلع ا ح يساوى ضلع ء ه وضلع ز ح يساوى صلع ء ب وزاوية ز ا ح المقابلة لـ ا ب هى مساوية لها وهى مساوية لزاوية ء ه ب وزاوية ا ز ح مساوية لزاوية ا ب ح وهى مساوية لمقابلها اعنى زاوية ء ب ه وزاوية ا ح ز مقابلة لزاوية ب ح ه المساوية لزاوية ب ء ه وكذلك فى سآئر المثلثات والاربعة الواقعة فى نصف السطح من المثلثات موافق كل اثنين منهما فى زاوية وضلع وتكون كل واحدة من الضلعين والزاويتين الباقية تماما لنظيره مثلا مثلث ا ب ح وقع مع مثلث ح ه ز فى النصف الذى عليه ا ب ه ز وقد توافقا فى زاوية ح فان زاوية ا ح ب مساوية لزاوية ز ح ه وفى ضلعى ا ب ه ز فانهما متساويان وايضا ضلع ب ح تمام ضلع ح ز وضلع ا ح تمام ضلع ح ه وزاوية ب ا ح المساوية لزاوية ب ه ح تمام زاوية ح ه ز وزاوية ا ب ح المساوية لزاوية ا ز ح تمام زاوية ح ز ه وقس على

ب ح ر الاربع ولتمر بهاعلى قطبي ا ح ببعد ضلع المربع بهما دآئرة ب ه ء ر فهى كالمنطقة لهما وقد انقسمت بهما باقسام ب ه ه ء ء ر ر ب الاربعة وهى اوتار لكل اربع زاويا من التى حدثت حول القطبين ء ب ه وتر لزاويتى ب ا ه ب ح ه وهو مقدارهما





وعند نقطتى ب ه غاية تباعد بين قوسى ا ب ح ا ه ح وايضاً ه ء مقدار زاويتى ه ا ء ه ح ء و ء ر مقدار زاويتى ء ا ر ء ح ر و ر ب مقدار زاويتى ر ا ب ر ح ب وقد ظهر ان زاويتى ب ا ه ب ح ه متساويتان لاتحاد مقداريهما وهكذا فى الباقية فان كانت قطع دآئرة ا ب ح ء لدآئرة ا ه ح ء على قوائم كانت الاقسام الاربعة متساوية وان لم تكن كذلك وكانت زاوية ب ا ه حادة مثلا كانت زاوية ه ا ء منفرجة وهى تمامها من نصف الدور وكانت زاوية ب ا ه متساوية لزاوية ء ا ر وذلك لان كل واحدة من قوسى ب ه ء ه ء ر نصف الدور منهما متساويتان وتلقى ه ء المشتركة بقيت ب ه مساوية ر ء وبمثله نبين ان زاوية ه ا ء مساوية لزاوية ر ا ب وقد تبين ان من الزاويا الثمانيـة الحادثة من تقاطع كل دآئرتين لم يقم احدهما على الاخرى اربعة حادات متساويات واربعة منفرجات متساويات وان كل حادة ومنفرجة معاً متساويتان لقائمتين

الفصل الثانى

فى صفات المثلثات الحادثة فى سطح الكرة من تقاطع الدوآئر العظام وذكر انواعها

كل مثلث يحدث من العظام فى بسيط الكرة فمن الواجب ان يحدث معه سبع مثلثات وذلك لان كل مثلث انما يحدث من ثلث قسى هى اجزاءٌ من ثلث

المقالة الخامسة

في بيان اصول تقوم في معرفة قسي الدوآئر العظام التي على الكرة مقام
الشكل القطاع وهي سبعة فصول

الفصل الاول

في صفة الزاويا الحادثة من تقاطع الدوآئر العظام على سطح الكرة

اذا تقاطعت دآئرتان عظيمتان في سطح الكرة على نقطتين متقابلتين وحدثت حول كل نقطة منهما اربع زاويا واردنا ان نعرف مقاديرها جعلنا تلك النقطة قطبا وتوهمنا عليها في سطح الكرة دآئرة عظيمة ببعد ضلع مربع يقع في احدى تلك الدوآئر فتمر تلك الدآئرة بمنتصف النقطتين المتقابلتين وتكون منطقة لهما على مابينه ثاو دوسيوس في الشكل الثامن عشر من المقالة الاولى من كتابه في الاكر والدآئرتان الاوليان يقسمان هذه المنطقة باربعة اقسام يكون كل قسم منها وتر الزاويتين المتقابلتين من الزاويا الثماني الحادثة حول تينك النقطتين ومقداره من الاجزآء الثلثمائة والستين التي تكون اجزآء جميع المنطقة هو مقدار كل واحد من الزاويتين المتقابلتين وعند ذلك الوتر يكون غاية التباعد من ضلعي كل زاوية من المذكورتين فظاهر من ذلك ان تينك الزاويتين تكونان متساويتين ثم ان كانت كل واحدة من الدآئرتين الاولين قائمة على الاخرى كان كل قسم من الاقسام الاربعة التي للمنطقة ربع الدور اعني تسعين درجة وهو مقدار الزاوية القائمة وان كان تقاطعهما على غير قوائم كان وتر الحادة اقل من الربع و وتر المنفرجة اكثر منه ومجموع كل حادة ومنفرجة متجاورتين متساو لنصف الدور وتكون كل واحدة من الباقيتين مساوية لما يقابلها الحادة والمنفرجة للمنفرجة فلتكن الدآئرتان دآئرتي $\overline{\text{ا ب ح ى}}$ $\overline{\text{ا ه ح ر}}$ وقد تقاطعتا على نقطتي $\overline{\text{ا ح}}$ فحدثت حول اَ زاويا $\overline{\text{ب ا ه}}$ $\overline{\text{ه ا ى}}$ $\overline{\text{ى ر ا}}$ $\overline{\text{ر ا ب}}$ الاربع وحول حَ زوايا $\overline{\text{ب ح ه}}$ $\overline{\text{ه ح ى}}$ $\overline{\text{ى ح ر}}$

معلومة بتوسط النسبتين الاخريين فيكون القانون فى معرفة كل واحدة منهما هو ما ذكرناه فى المقالة الثالثة فهذه فآئدة هذا الشكل ولم يزل قدمآء علمآء الهندسة يستعملون هذا الشكل فى هذه المطالب وعليه يعتمدون ولذلك اورده مانالاوس فى كتابه فى الكرات وبطليوس فى صدر كتابه الموسوم بالمجسطى اما المتأخرون فلتحاشيهم من التعب الذى يقع فى ضبط اختلافاته ونسبه ومن الكلفة التى تكون فى العمل بالنسبة المؤلفة استنبطوا اشكالا تقوم مقام القطاع فى فوآئده ولا يقع فيها اختلاف كثير ولا نسبة مؤلفة واستعملوها بدله وانا لما اشبعت الكلام فى هذا الشكل رأيت ان اذيله بطرق المتأخرين ليكون هذا الكتاب وافيا بجميع ما يتعلق بهذا النمط من العلم ان شآء الله تعالى

جيب قوس د ا مؤلفة من نسبة جيب قوس ب ز الى جيب قوس ز ه ونسبة جيب قوس ه ح الى جيب قوس ح ا فتكون فيه جيوب قسى ب د ز ه ح ا من الحيز الاول وجيوب قسى د ا ب ز ه ح من الحيز الثانى فان اعتبرنا تأليف نسبة جيب قوس ب د الى جيب قوس ب ز من نسبة جيب قوس د ب الى جيب قوس ح ا ومن نسبة جيب قوس ح ه الى جيب قوس ه ز كانت من الدعوى الثانية على الترتيب وان اعتبرنا تأليف نسبة جيب قوس د ا الى جيب قوس ه ح من نسبة جيب قوس د ا الى جيب قوس ه ز ومن نسبة جيب قوس ب ز الى جيب قوس ح ا كانت الدعوى الثالثة على الترتيب وبالجملة اعتبار اللوازم المتعاكسة الخمسة والثلثين المذكورة فى المقالة الاولى لكل نسبة مؤلفة تصير جميع ضروب الدعاوى المذكورة فى القطاع السطحى معلومة الا ان بياناتها لم تكن هناك للبعض بتوسط البعض وههنا يكون لما عدا الدعوى الاولى على الترتيب بتوسطها وهذا هو الوجه فيما قلنا فى اخر الفصل الثانى من المقالة الثانية من كون الدعوى الاولى على الترتيب اصلا وما عداها فروعاله وماشبه هذه الدعاوى باشكال المنطق فان الشكل الاول كالاصل وماعداه كالفروع له والله اعلم

الفصل الخامس

فى الاشارة الى فائدة هذا الشكل واختتام الكلام فيه

فائدة هذا الشكل الوقوف على كيفية معرفة مقادير القسى الحادثة من تقاطع الدوائر العظام فى سطح الكرة بعضها بتوسط البعض الاخر وقد بينا فى المقالة الاولى الوجه فى تعرف كل حد من الحدود الستة الواقعة فى النسبة المؤلفة بتوسط الحدود الخمسة الباقية فهذه القوانين توصل الى المطالب المذكورة وربما يقع فى القسى الستة التى هى حدود النسبة قوسان مجهولان يتصل احديهما بالاخرى على وجه التركيب او التفصيل وتصير نسبة جيب احديهما الى جيب الاخرى

الاول يكون المثلث المعطل فيه اما مثلث ب د ز واما مثلث ه ز ح ويكون على الترتيب وتفصيل ذلك يقتضى تطويل الكلام ولا حاجة لمن وقف على القوانين الى ذلك واذا تبين هذا الضرب اعنى المعروف بتركيب بطليوس فان اردنا بدأنا به وبينا الضرب المعروف بتفصيله بناءً عليه نعكس ما عمله بطليوس حتى يكون كل ضرب منهما برهانين احدهما على سبيل الابتداء والآخر مبنى على برهان الضرب الاخر ولبيان التفصيل المبنى على بيان التركيب نعيد الشكل الذى اوردناه على عكسه ونقول لما تبين مما ذكرنا ان فى قطاع ا ح ه نسبة قوس ح د الى جيب قوس د ا مؤلفة من نسبة جيب قوس ح ز الى جيب قوس ز ه ومن نسبة جيب قوس ه ح الى جيب قوس ح ا وكانت قوس ب د تمام قوس د ح ومن نصف الدور وقوس ب ز تمام قوس ح ز وكانت نسبة جيب قوس ب د الى جيب قوس



د ا مؤلفة من نسبة جيب قوس ب ز الى جيب قوس ز ه ومن نسبة جيب قوس ه ح الى جيب قوس ح ا وهو المعروف بالتفصيل وذلك ما اردناه

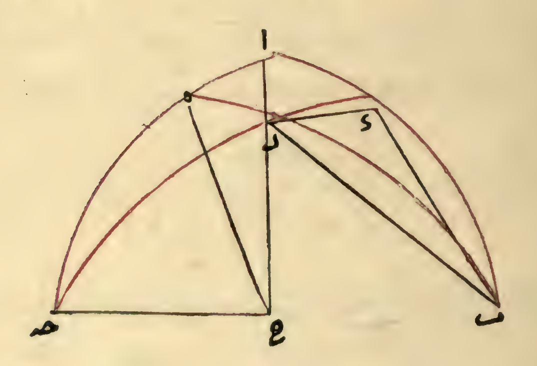
﴿ الفصل الرابع ﴾

❊ فى بيان النسب الواقعة فى باقى ضروب الدعاوى الواقعة فى القطاع الكرى ❊

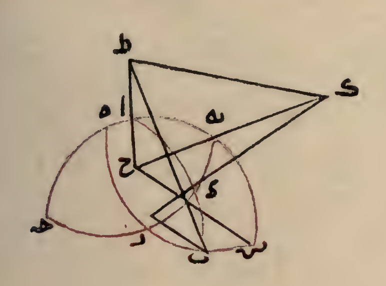
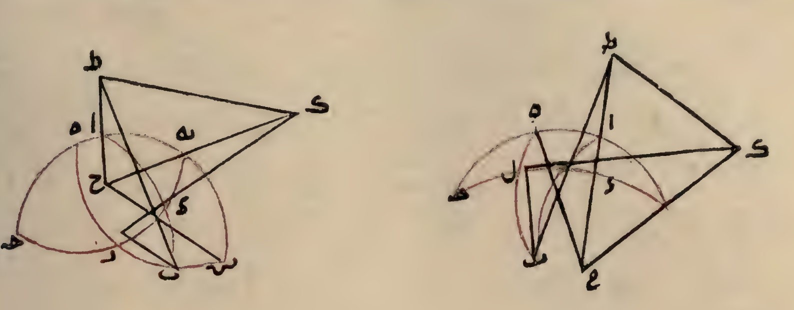
لما تبين فى قطاع ا ب ح ضروب الدعاوى الاولى على الترتيب صارت ضروبها التى تكون بالعكس او التشويش وضروب الدعوتين الباقيتين بتمامها ثابتة وذلك من جهة اعتبار لوازم النسب المؤلفة الواقعة فيها فليكن المعلوم اولا الضرب المعروف بتفصيل بطليوس وهو ان نسبة جيب قوس ب د الى

ب ر ء ر ونصفى قطرى ح ه ح ح الى ط ك ونصل ط ك ء ب ح ع او ح ا ونبين توازيهـا فتكون لتشـابه مثلثى ب ء ر ر ط ك نسـبة ب ط الى ط ر اعنى جيب قوس ب ه الى جيب قوس ه ر كنسبة ء ك الى ك ر اعنى نسـبة جيب قوس ء ح الى جيب قوس ح ء ونسبة جيب قوس ب ع الى جيب قوس ع ء فى القطاع الاول نسـبة المثل وكذلك نسبة جيب قوس ب ا الى جيب قوس ا ء وفيه وفى الثانى جميعا وهى مؤلفة فى كليهما من نسبة جيب قوس ب ه الى جيب قوس ه ر ومن خلافها اعنى من نسبة جيب قوس ر ح الى جيب قوس ح ء وهو المطلوب

واما فى النوع الواقع فى القسم الثالث وهو الثالث عشر من الانواع الممكنة وهو ان تكون ابعاد نقط ب ء ر التى على زوايا المثلث المعطل من سطح الدائرة المعطلة متساوية فلنرسم القطاع المفروض ونصل اوتار المثلث المعطل وانصاف الاقطـار الخارجة الى نقطة الركن المعطل فيكون كل وتر موازيا لنصف قطر الدائرة التى يكون ذلك الوتر فى سطحه ب ء ح ا و ب ء ح ه و ء ر ح ح و تكون فيه نسبة جيب قوس ب ا الى جيب قوس ا ء نسـبة المثل وكذلك نسبة جيب قوس ب ه الى جيب قوس ه ر ونسبة جيب قوس ر ح الى جيب



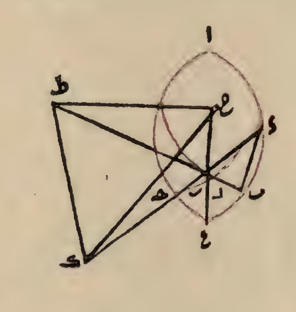
قوس ح ء و تكون كل نسبة مثل مؤلفة من النسبتين المذكورتين وهو المطلوب وههنـا تم البرهان على الدعوى المعروفة بتركيب بطلميوس و بمثل هذا البيان يمكن ان يقام البرهان على كل ضرب من ضروب الدعوى

ره الى جيب قوس هد ففى القطاعين نسبة جيب قوس با الى جيب قوس اد مؤلفة من نسبة المثل التى هى فى الاول نسبة جيب قوس س الى جيب قوس سر وفى الثانى نسبة جيب قوس به الى جيب قوس هر ومن نسبة مثل المؤلفة وهى فيهما نسبة جيب قوس هر الى جيب قوس هد ولكون نسبة بس تمام به و سر تمام ره و ره تمام رح و هد تمام دح تكون فى القطاعين نسبة جيب قوس با الى جيب قوس اد مؤلفة من نسبة جيب قوس به الى جيب قوس هر ومن نسبة جيب قوس رح الى جيب قوس حد وهو المطلوب

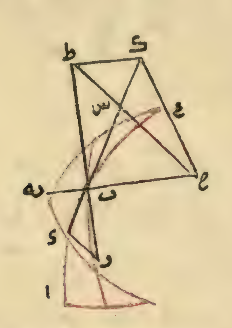


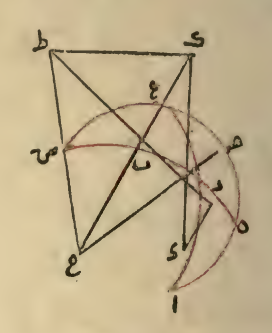
واما فى النوع السادس وهو ان تكون نقطة ر اقرب من نقطتى بد

المتساويتى البعد ويكون القطاع المخصوص على تقدير كون د على الزاوية الاولى هو قطاع عهدر وعلى تقدير كون ب عليها هو قطاع ابحر فلنرسم الاول مع القطاع المفروض والثاني وهو بعينه المفروض ونخرج وترى

رب ونصفى قطرى ح س ح ع الى ان يلتقيا على طك ونصل طك ىر
ونصفى قطرى ح ح ه ونبين توازيها بمثل مامر فيكون لتشابه مثلثى ى ز ب
ب ط ك يكون نسبة ك ب الى ك ى اعنى نسبة جيب قوس ع ب الى
جيب قوس ع ى كنسبة ط ب الى ط ر اعنى نسبة جيب قوس س ب الى
جيب قوس س ر ففى قطاعى ح ى س ب ه ع ر ب نسبة جيب قوس ب ع



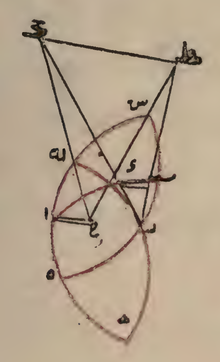


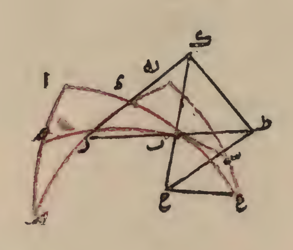
الى جيب قوس ع ى مؤلفة من نسبة جيب ب س الى جيب قوس س ل التى
هى مثلها ومن نسبة المثل التى هى فى القطاع الاول نسبة جيب قوس ر ح
الى جيب قوس ح ى وفى القطاع الثانى نسبة جيب قوس ر ه الى جيب قوس
ه ى ولكون ب ع تمام ب ا و ع ى تمام ى ا و ب س تمام ب ه
و س ر تمام ر ه فى القطاعين و ر ه تمام ر ح و ه ى تمام ى ح فى الاخير تكون
نسبة جيب قوس ب ا الى جيب قوس ا ى مؤلفة من نسبة جيب قوس ب ه
الى جيب قوس ه ر ومن نسبة جيب قوس ر ح الى جيب قوس ح ى
وهو المطلوب

واما فى النوع الخامس وهو ان تكون نقطة ى اقرب من نقطتى ب ر
المتساويتى البعد يكون القطاع المخصوص على تقدير كون ر على الزوايا الاولى
هو قطاع س ر ا ى وعلى تقدير كون ب عليها هو قطاع ه ه ب ى فلنرسمهما
مع القطاع المفروض ونخرج وترى ب ى ب ر ونصفى قطرى ح ه ح ا الى
ك ط ونصل ك ط ب ر ونصفى قطرى ح س ح ه ونبين توازيهما فتكون
نسبة ب ط الى ط ى لتشابه مثلثى ب ى ر ب ك ط اعنى نسبة جيب قوس
ب ا الى جيب قوس ا ى كنسبة ر ك الى ك ى اعنى نسبة جيب قوس

يكون على الزاوية المشتركة بَ واما س ر ا ء وذلك على تقديران يكون على الزاوية المشتركة ءَ فلنرسمها مع القطاع المفروض ونخرج وترى ر ب ر ء ونصفى قطرى ح س جـ ه الى ان يلاقياهما عند نقطتى طَ كَ ونصل ط ك ب ء فيكونان متوازيين كام ونصل نصف قطر ح ا او ح ع ويكون موازيا لهما ويكون فى مثلث ر ط ك نسبة ب ط الى ط ر اعنى نسبة جيب قوس ب س الى جيب قوس س ر كنسبة ء ك الى ك ر اعنى نسبة جيب قوس ء ه الى جيب قوس ه ر ففى قطاع ه ع ب ر نسبة جيب قوس ب ع الى جيب قوس ع ء اعنى نسبة جيب قوس ب ا الى



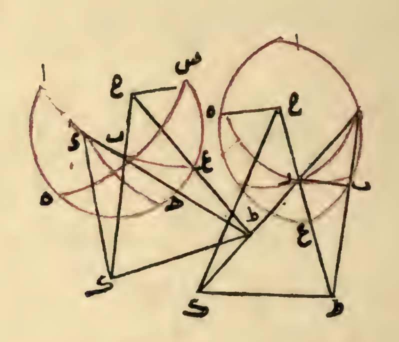




جيب قوس ا ء التى هى نسبة المثل وفى قطاع س ا ء تلك النسبة بعينها مؤلفتين من نسبة جيب قوس ب س الى جيب قوس س ر ومن خلافها اعنى نسبة جيب ر ه الى جيب قوس ه ء ولكون ب س تمام ب ه و س ر تمام ر ك و ر ه تمام ر حـ و ه ء تمام ء حـ فاذا نقلنا البيان فيهما الى القطاع المفروض كانت نسبة جيب قوس ب ا الى جيب قوس ا ء مؤلفة من نسبة جيب قوس ب ه الى جيب قوس ب ر ومن نسبة جيب قوس ر حـ الى جيب قوس حـ ء وهو المطلوب

واما فى النوع الرابع وهو ان تكون نقطة بَ اقرب من نقطتى ءَ رَ المتساويتى البعد ويكون القطاع المخصوص على تقدير كون ءَ على الزاوية الاولى هو قطاع حـ ء س ب وعلى تقدير كون رَ على الزاوية الاولى هو قطاع ه ع ر ب فلنرسمهما مع القطاع المفروض ونخرج وترى ء ب

واما فى النوع الثانى من الانواع الستة الثانية وهو ان تكون نقطة ى ابعد من نقطتى ب ر المتساوتى البعد ويكون القطاع المخصوص بالبيان على تقدير كون نقطة ر على الزاوية الثانية ونقطة ب على الزاوية المشتركة وقطاع ع ه ى ر وعلى تقدير عكسه قطاع حـ ى س ب فلنرسمها مع قطاع ا ب حـ ل المفروض ونخرج وترى ى ب ى ر ونصفى قطرى ح ع ح حـ الى ان يلتقيا على ط ك ونصل وتر ب ل ونصفى قطرى ح ه ح س ويثبت انهما مع وتر ب ل وخط ط ك متوازية فتكون فى مثلث ى ط ك نسبة ب ط الى ط ى اعنى نسبة جيب قوس ب ع الى جيب قوس ع ى كنسبة ر ك الى ك ى اعنى نسبة جيب ل حـ الى جيب قوس حـ ى وكانت نسبة جيب قوس ه ل ا الى جيب قوس ه ب نسبة المثل وكذلك نسبة جيب قوس ر س الى جيب قوس س ب ففى قطاعى ع ه ى ل حـ ى س ب نسبة جيب قوس ب ع الى جيب قوس ع ى مؤلفة من نسبة المثل التى هى اما جيب قوس ب ه الى ه ل واما جيب قوس ب س الى س ر ومن نسبة مثلها وهى نسبة جيب قوس ل حـ الى جيب قوس ى حـ ولكون

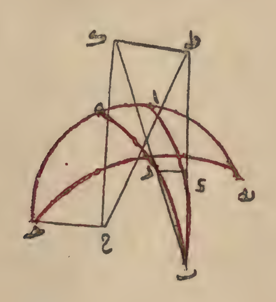


ب ع تمام ب ا و ع ى تمام ى ا و ب س تمام ب ه و س ر تمام ل ى واذا نقلنا البيان الى قطاع ا ب حـ ر المفروض كانت نسبة جيب قوس ب ا الى ا ى مؤلفة من نسبة جيب قوس ب ه الى ه ر ومن نسبة جيب قوس ر حـ الى جيب قوس حـ ى وهو المطلوب

واما فى النوع الثالث منها وهو ان تكون نقطة ر ابعد من نقطتى ب ى المتساويتى البعد ويكون القطاع المخصوص اما ه ع ر ب وذلك على تقدير ان



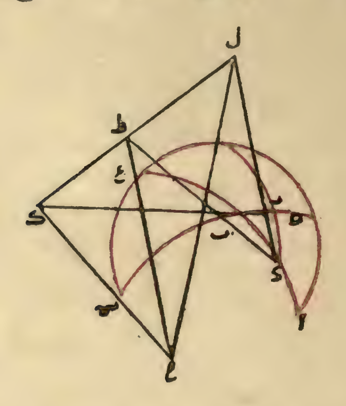
الخط الواصل بينهما فصلا مشتركا بينهما ومتوازيا لدر الكائن معه فى سطح المثلث المعطل اما اولا فلامتناع الملاقاة بين خط ءر وسطح الدائرة المعطلة واما ثانيا ان طك مواز لحـ الكائن معه فى سطح دائرة اهـ والافليلقه عند لَ وحينئذ يكون ءرل خطا مستقيما لكون نقط ءَ رَ لَ فى سطحى المثلث والدائرة المعطلين فكون ءل الموازى لحـ ملاقيا له هذا خلف ولما ثبت توازى طك حـ وكان حـ موازيا لدل فطك مواز لدل واماثالثافلان طك لولم يكن موازيا لدل لم يكن ايضا موازيا لحـ الموازى له وليخرج طم فى سطح مثلث بءر موازيا لدل و طه فى سطح دائرة اهـ موازيا لحـ فيكون طم لكونه موازيا لدر الموازى لحـ الموازى لطء موازيا لطه لكنه ملاق له على طَ هذا خلف واذا ثبت هذا كانت نسبة بط الى طء اعنى نسبة جيب قوس با الى جيب قوس اء كنسبة بك الى كر اعنى نسبة جيب قوس به الى جيب قوس هر واذا اضفنا الى النسبة الثانية نسبة جيب قوس رحـ الى جيب قوس حـء المتساويين فى القطاع المفروض اعنى فى الشكل الاول اونسبة جيب قوس ره الى جيب قوس هء المتساويين ايضا فى القطاع المخصوص من الشكل الثانى كانت نسبة جيب قوس با الى جيب قوس اء مؤلفة من نسبة جيب قوس به الى جيب قوس هر التى هى مثلها واما نسبة جيب قوس رحـ الى جيب



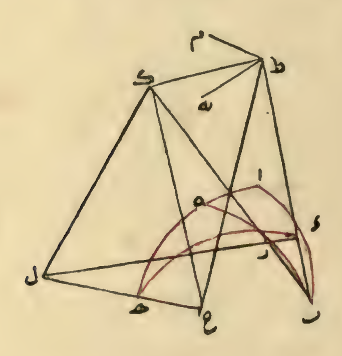
قوس حـء التى هى نسبة المثل وذلك فى الشكل الاول اومن نسبة جيب قوس ره الى جيب قوس هء التى هى نسبة جيب قوس رحـ الى جيب قوس حـء بعينها وذلك فى الشكل الثانى وهوالمطلوب

مؤلفة من نسبة جيب قوس ب ه الى جيب قوس ز ه ومن نسبة جيب قوس ز ح الى جيب قوس ح د وهو المطلوب

واما فى النوع الاول من الانواع الستة الواقعة فى القسم الثانى وهو ان تكون نقطة ب ابعد من نقطتى ز ه المتساويتى البعد ويكون القطاع المخصوص بالبيان اما قطاع ا ب ح ز المفروض بعينه واما قطاع ه ه ب د ونخرج منهما



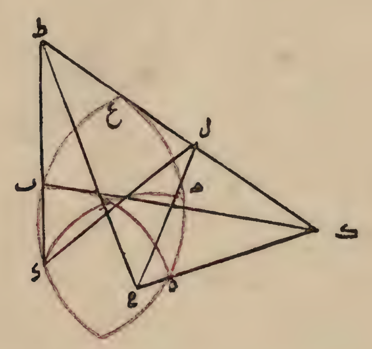
اوتار المثلث المعطل وانصاف اقطار الركن المعطل فيتلاقى فى القطاع الاول وتر ب د ونصف قطر ح ا على ط ووتر ب ز ونصف قطر ح ه على ك ونصل ط ك ولكون بعدى د ز من سطح دائرة ا ه ح اعنى العمودين الواقعين منهما عليه متساويين يمتنع ان يتلاقى وتر د ز ذلك السطح ولكون وتر د ز ونصف قطر ح ح معا فى سطح واحد وهو سطح دائرة د ز ح وامتناع ملاقاتهما يكونان



متوازيين ولوقوع نقطتى ط ك فى سطحى المثلث والدائرة المعطلين يكون

الى جيب قوس اء مؤلفة من نسبة جيب قوس به الى جيب قوس هل ومن نسبة جيب قوس رح الى جيب قوس حء وهو المطلوب

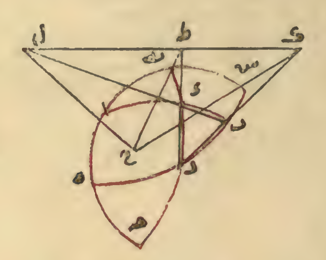
واما فى النوع الخامس وهو ان يكون ءَ ابعد النقط و رَ اقربها فلنرسم قطاع ع ه ء ر المخصوص بالبيان مع القطاع المفروض ونخرج الاوتار وانصاف الاقطار فيحدث قطاع ط ك ء ر السطحى ويكون فيه نسبة ب ط الى ط ء اعنى نسبة جيب قوس ب ع الى جيب قوس ع ء مؤلفة من نسبة ب ك الى ك ر اعنى نسبة جيب قوس به الى جيب قوس ه ر ومن نسبة ر ل الى ل ء ر ح الى جيب قوس ح ء ويكون ب ع تمام ب ا و ع ء تمام ء ا كانت فى القطاع المفروض نسبة جيب قوس ب ا الى جيب قوس اء مؤلفة من نسبة جيب قوس به الى جيب ه ر ومن نسبة جيب قوس ر ح الى جيب قوس ح ء وهو المطلوب



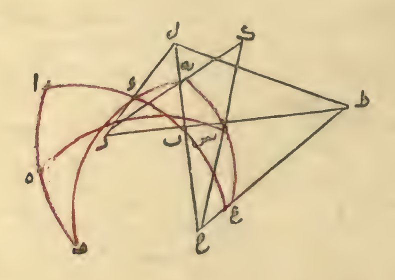
واما النوع السادس وهو ان يكون ءَ ابعد النقط و ب اقربها فلنرسم قطاع ح ء س ر المخصوص بالبيان مع قطاع ا ب ح ر المفروض ونخرج الاوتار وانصاف الاقطار فيحدث قطاع ء ل ك ب السطحى ويكون فيه نسبة ب ط الى ط ء اعنى نسبة جيب قوس ب ع الى جيب قوس ء ع مؤلفة من نسبة ب ك الى ك ر اعنى نسبة جيب قوس ب س الى جيب قوس س ر ومن نسبة ر ل الى ل ء اعنى نسبة ل ح جيب قوس ر ح الى جيب قوس ح ء ولكون ب ع تمام ب ا و ع ء تمام ء ا و ب س تمام به و س ر تمام ر ه و اذا نقلنا البيان الى القطاع المفروض كانت نسبة جيب قوس ب ا الى جيب قوس ا ء

اعنى نسبة جيب قوس ب ا الى جيب قوس ا ء مؤلفة من نسبة ب ك الى ك ر اعنى نسبة جيب قوس ز س الى جيب قوس س ر ومن نسبة ر ط الى ط ء اعنى نسبة جيب قوس د ن الى جيب قوس ن ء ولكن ب س تمام ب ه و ل س تمام ر ه و ر ن تمام ر ح و ن ء تمام ء ح فاذا نقلنا البيان الى القطاع المفروض كانت نسبة جيب قوس ب ا الى جيب قوس ء ا مؤلفة من نسبة جيب قوس ب ه الى جيب قوس ه ر ومن نسبة جيب قوس ر ح الى جيب قوس ح ء وهو المطلوب





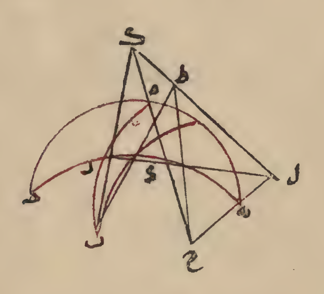
واما فى النوع الرابع وهو ان يكون رَ ابعد النقط و بَ اقربها فلنرسم قطاع ه ع ر ب المخصوص بالبيان مع القطاع المفروض ويخرج الاوتار وانصاف الاقطار فيحدث قطاع ل ط ر ب السطحى ويكون فيه نسبة ب ط الى ط ء اعنى نسبة جيب قوس ب ع الى جيب قوس ع ء مؤلفة من ب ك الى ك ر اعنى نسبة جيب قوس ب س الى جيب قوس س ر ومن نسبة ر ل الى ل ء اعنى نسبة جيب قوس ر ه الى جيب قوس ه ء ولكون ب ع تمام ب ا و ع ء تمام ء ا و ب س تمام ب ه و س ء تمام ر ه و ر ه تمام ر ح و ه ء تمام



ء ح فاذا نقلنا البيان الى قطاع ا ب ح ر المفروض كانت نسبة جيب قوس ب ا

وتر ءز ونصف قطر ح ه في جهة ه وليكن عند ل ولكون نقط ط ك ل في سطحي اوتار المثلث المعطل ودائرة المعطل وتكون جميعاً على فصلهما المشترك وهو خط ط ك ل المستقيم ولنرسمه فيتم به قطاع ب ط ل ز السطحي ويكون فيه نسبة ب ط الى ط ء اعني نسبة جيب قوس ب ا الى جيب قوس اء مؤلفة من نسبة ب ك الى ك ز اعني جيب قوس ب ه الى جيب قوس ه ز ومن نسبة ز ل الى ل ء اعني نسبة جيب قوس ل ه الى جيب قوس ه ء وهو المطلوب

واما النوع الثاني منها وهو ان يكون ابعد النقط ب واوسطها ل واقربها ء والقطاع المخصوص بالبيان ه ب ء فلنرسمه مع القطاع المفروض وتخرج الاوتار وانصاف الاقطار كما بينا فيحدث قطاع ك ل ب ء السطحي ويكون فيه نسبة ب ط الى ط ء اعني نسبة جيب قوس ب ا الى جيب قوس ء ا مؤلفة من نسبة ب ك الى ك ز اعني نسبة جيب قوس ب ه الى جيب قوس ه ز ومن نسبة ز ل الى ل ء اعني نسبة جيب قوس ز ه الى جيب قوس ه ء ولكون ز ه تمام ز ه من نصف الدور و ه ء تمام ء ه وجيب كل واحدة منهما مساو



لجيب تمامه فاذا نقلنا البيان الى قطاع ا ب ه المفروض كانت نسبة جيب قوس ب ا الى جيب قوس ء ا مؤلفة من نسبة جيب قوس ب ه الى جيب قوس ه ز ومن نسبة جيب قوس ز ه الى جيب قوس ء ه وهو المطلوب

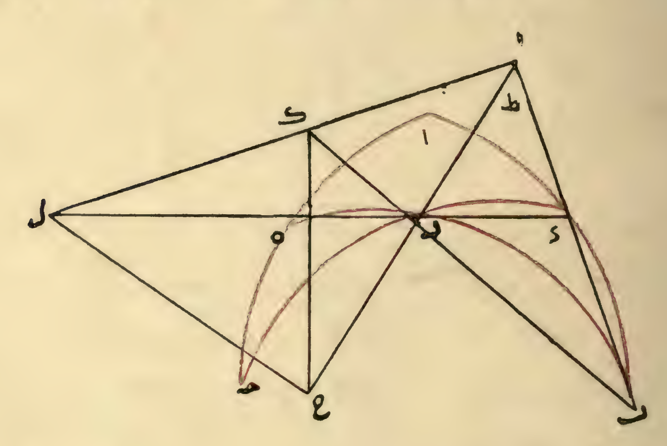
واما في النوع الثالث منها وهو ان يكون ز ابعد النقط و ء اقربها فلنرسم قطاع س ز ا ء المخصوص بالبيان مع القطاع المفروض واخرجنا الاوتار وانصاف الاقطار فيحدث قطاع ك ز ل ء السطحي وتكون فيه نسبة ب ل الى ل ء

مشتركة او على البدل وعلى التقدير الثـانى يكون احدهما اولى والاخرى ثانية اوعلى البدل و يختلف القطاع المخصوص بالبيـان بحسب اختلافهما فيكون لكل وجه قطاعان مشتركان بعد المثلث المعطل الذى يشترك فيه الجميع اماعلى التقدير الاول ففى مربع و يختلفان بمثلثين واما على التقدير الثـانى ففى مثلث و يختلفـان بمربعين ونحن وضعناها فى جدول هى هذه (فى الصفحة السابقة)

واما القسم الثالث فنوع واحد وهو ان يكون ابعاد نقط بَ دَ رَ الثلث عن سطح دائرة اجه المعطل متسـاوية وليشغل ثنتان واحد من هذه الانواع الثلثة عشر

فنقول اما النوع الاول من الستة الاولى وهو ان يكون القطاع المخصوص بالبيان هو المفروض وهو قطاع ابجر ولنعده وحده والدعوى فيه ان نسبة جيب قوس با الى جيب قوس اد مؤلفة من جيب قوس به الى جيب قوس هر ومن جيب قوس رج الى جيب جد

برهانه وقدم ان نقطة بَ من دائرة جها المعطل اعظم من بعد رَ فنصل اوتار مثلث بدر المعطل وليكن المركز حَ ونصـل بينـه و بين نقطة اهج من الركن المعطل ونخرج انصاف اقطار حل جه حج والاوتار الى ان تتلاقى فيكون بالضرورة يتلاقى وتر بد ونصف قطر اح فى جهة اَ وليكن عند



ط وتلاقى وتر بر ونصف قطر هح فى جهة هَ وليكن عند ك وتلاقى



اما اعظم واما اصغر فتصير الاقسام ستة واما الثالثة فان كان بعدها اعظم وجب
ان تكون هى نقطة الزاوية الاولى وان كان اصغر وجب ان تكون هى الزاوية
المشتركة واما المتساويتا البعد فعلى التقدير الاول يكون احديهما ثانية والاخرى

عدد الاختلافات الممكنة	ابعد النقط وهى الزاوية الاولى	المتساويتا البعد		القطاع المخصوص	المشارك فى هذه القطاعات
		الثانية	المشتركة		
ا	ب	ى	ر	ا ب ح ر	ر
		ر	ى	ه ل ب ى	ه
ب	ى	ب	ر	ح ط س ب	ى
		ر	ب	ع ه ى ر	ر
ح	ر	ب	ى	س ر ا ى	ه
		ى	ب	ل ع ر ب	ى
عدد الاختلافات الممكنة	اقرب النقط وهى المشتركة	المتساويتا البعد		القطاع المخصوص	المشارك فى هذه القطاعات
		الاولى	الثانية		
ى	ب	ى	ر	ح ى س ب	ب
		ر	ى	ل ع ر ب	ح
ه	ى	ر	ب	س ر ا ى	ح
		ب	ر	ه ل ب ى	ا
ر	ر	ى	ب	ع ه ى ر	ب
		ب	ى	ا ب ح ر	ا

متساوية وهذه ثلثة اقسام اما القسم الاول فينحصر فى ستة انواع وذلك ان كل
نقطة منها يمكن ان تكون ابعد من الاخرين وعلى تقدير كونها ابعد فكل واحد
من الاخرين يمكن ان يكون ابعد من الباقى فتصير الاقسام ستة ولما وجب ان يقع
التلاقى بين الوتر ونصف القطر اذا اخرجا فى جهة النقطة التى يكون بعدها اصغر
وبحسب اختلاف جهات التلاقى يختلف وقوع القطاع فى المثلثات والمربعات التى
تشملها دائرة احں وان كان للكل مشترك فى المثلث المعطل اعنى مثلث ںءر
ويشارك البعض البعض فى غيره من المثلثات والمربعات والمثلث المعطل ايضا
تختلف زواياه فتكون تارة هذه اولى وتلك ثانية والباقية مشتركة وتارة بالعكس
والضابط ان الابعد يكون ابدا هو الاول والاوسط هو الثانى والاقرب هو المشترك
ونحن وضعناها جميعا فى جدول هى هذه [١]

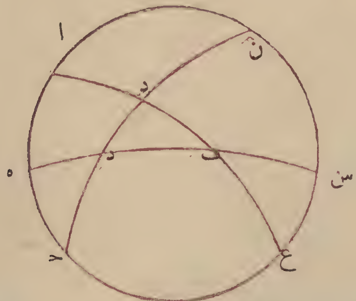
عدد الاختلافات الممكنة	ا	ب	ح	ء	ه	ر
ابعد النقط	ب	ب	ر	ر	ء	ء
اوسط النقط	ء	ر	ب	ء	ب	ر
اقرب النقط	ر	ء	ء	ب	ر	ب
القطاع المخصوص بالبيان الذى ينقل منه البيان الى القطاع المفروض	المخصوص المفروض وهو اب....	ن ه ب ء	س ر ا ء	ن ع ر ب	ع ه ء ر	ح ء س ب

واما القسم الثانى فينحصر ايضا فى ستة انواع وذلك ان تساوى بعدى نقطتين
من النقط الثلث يكون على ثلثة اوجه وانه يقع اما بين نقطتى بَ ءَ واما بين
نقطتى بَ رَ واما بين نقطتى ءَ رَ وفى كل وجه يكون بعد الثلثة المخالفة بعدها

[١] مثلا ان كان بعد بَ اعظم من البعدين الاخرين فحينئذ بعد ءَ اعظم من رَ او اصغر
وهذان اختلافان وهكذا كان بعد رَ اعظم من البعدين الاخرين فيحصل اختلافان وكذا ان كان
بعد ءَ اعظم من البعدين الاخرين فيحصل ست اختلافات ★ من الفارسية

لبيـان ذلك مقدمة فى هذه لتكن دائرة اب من العظـام فى سطح كرة وليقطعها اىح ايضا من العظام على غير زوايا قائمة وليكن اى اه قوسين مختلفى الجيب مثلا جيب اى اعظم من جيب اه اقول فبعد نقطة ى عن سطح دائرة ابح يكون اعظم من بعد ه عنها

برهانه نصل اح وهو الفصل المشـترك بين الدائرتين ويخرج من نقطتى ىه عمودى ىر هح عليه فيكونان متوازيين ومنهما ايضـا على سطح دائرة ابح عمودى ىط هك وهما ايضا متوازيان ويكون زاويتا حهك رىط متسـاويتين لتوازى الاضلاع المحيطة بهما ونصل طر كح فيحدث مثلثا ىطر هكح المتشابهان ولكون ىر اعظم من هح يكون عمود ىط اعظم من عمود هك فاذن بعد نقطة ى عن سطح دائرة ابح اعظم من بعد نقطة ه عنها وذلك ما اردناه وبعد تقديم هذه المقدمة نعيد الشكل ونتم دائرة الركن المعطل ونخرج قسى المثلث المعطل اليهـا ولتلاقيها على نقط ن س ع فاذا كان التلاقى بين وتر بى وقرينه من الاقطار فى جهة ى كان بعد نقطة ب عن سطح دائرة احن اعظم من بعد نقطة ى عنها ثم اذا كان التلاقى بين وتر ىر وقرينه فى جهة ر كان بعد نقطة ى اعظم من بعد نقطة ر فبعد نقطة ب اعظم كثيرا من بعد نقطة ر ثم اذا كان التلاقى بين رب وقرينه فى جهة ب كان بعد نقطة ر اعظم من بعد نقطة ب الذى كان اعظم منه هذا خلف



واذا تبين هذا فنقول الوجوه الثلثة من السبعة والعشرين ثلثة عشر وجها فقط والباقى محال الوقوع وذلك ان ابعاد نقط بىر الثلث عن سطح دائرة احن اما ان تكون مختلفة واما ان يكون اثنان منها متساويان فقط واما ان تكون جميعها

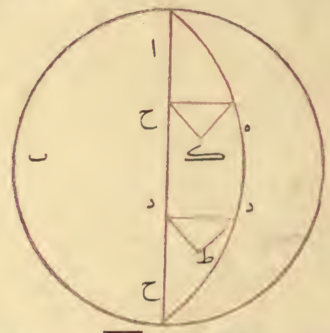


الكلى فى اقامة البراهين على هذا الشكل حتى يكون الكلام فيه تاماً متناسباً ان شاء الله تعالى

فلنعد الشكل ونقول لما كانت دعوى التركيب هى تأليف نسبة جيبى قوسى ب ا ا ى كان الركن المعطل ا ه ح والمثلث المعطل ب ى ر فلنصل اوتار المثلث وانصاف اقطار الركن اعنى ح ا ح ه ح ح كما هى العادة وكان قانون البرهان



ان نعتبر تلاقى وتر ب ى ونصف قطر ح ا وتلاقى وتر ب ر ونصف قطر ح ه وتلاقى ى ر ونصف قطر ح ح حتى يتم القطاع السطحى وحالة كل وتر مع نصف القطر الذى قرينه لا يخلو من ثلثة اوجه اما ان يتلاقيا فى جهة المحيط من انصاف الاقطار او فى جهة المركز واما ان يتوازيا ولكون الاوتار ثلثة يكون عدد اعتبار الجميع ما يحصل من ضرب ثلثة فى ثلثة وهو سبعة وعشرون لكن جميع هذه الوجوه ليس بممكن الوقوع وذلك لان تلاقى وتر ب ى وقطر ح ا انما يكون فى جهة اَ اذا كان جيب ا ب اعظم من جيب ا ى وفى جهة ب اذا كان اصغر منه وتوازيهما اذا تساويا وكذلك فى البواقى واحد الوجوه



السبعة والعشرين ان يكون التلاقى بين ب ى وقرينه من الاقطار فى جهة ى وبين ى ر وقرينه فى جهة ر وبين ر ب وقرينه فى جهة ب وهذا محال لانه يقتضى ان يكون بعد ب من سطح دائرة ا ه ح اعظم مما هو اعظم منه ولنقدم

الفصل الثالث

فى اقامة البرهان على الدعوى المعروفة بتركيب بطلميوس

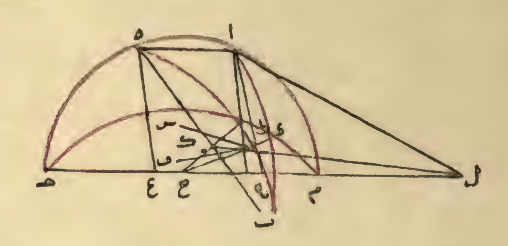
اقتصر بطلميوس فى اقامة البرهان على الضرب المعروف بالتركيب من الدعوى الاولى على ان اخرج ركنين من القطاع المفروض للتركيب الى نصف الدور حتى حدث قطاع اخروتين بدعوى التفصيل فيه دعوى التركيب فى القطاع المفروض مثاله ليكن القطاع المفروض قطاع ب ا جـ ر ودعوى التركيب فيه ان يقال نسبة جيب قوس ب ا الى جيب قوس ا ء مؤلفة من نسبة جيب قوس ب ه الى جيب قوس ه ر ومن نسبة جيب قوس ر جـ الى جيب قوس جـ ء

برهانه يخرج كل واحد من ركنى ب ا ب ه الى ان يتلاقيا عند تمام نصف الدور على ح فيكون بحكم البيان المذكور فى الفصل المتقدم فى قطاع جـ ى خ ه الحادث نسبة جيب قوس ح ا الى جيب قوس ا ء مؤلفة من نسبة جيب



قوس ح ه الى جيب قوس ه ر ومن نسبة جيب قوس ر جـ الى جيب قوس جـ ء ولكون جيب قوس ح ا هو جيب قوس ب ا بعينه وجيب قوس ح ه هو جيب قوس ب ه بعينه تكون نسبة جيب قوس ب ا الى جيب قوس ا ء مؤلفة من نسبة جيب قوس ب ه الى جيب قوس ه ر ومن نسبة جيب قوس ر جـ الى جيب قوس جـ ء وذلك ما اردناه فهذا القدر كاف فى هذا الموضع الا انه لما كان الغرض فى هذه الرسالة استيعاب ضروب الدعاوى والبراهين المتعلقة بهذا الشكل واستيفاء بيان اختلافاته وجب علينا ان نورد البرهان ههنا ايضا بحسب القانون

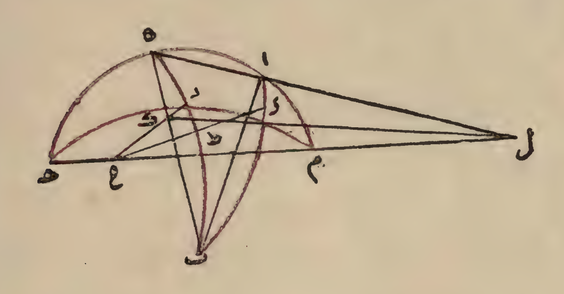
على خط ل ا ه المستقيم وحينئذ يكون خطا ه ا ح م متلاقيين على ل وقد فرضنا هما متوازيين هذا خلف فاذن ط ك مواز لقطر م ح وكان ا ه موازيا له فط ك مواز لا ه وبوجه آخر ان لم يكن ط ك موازيا لكل واحد من وتر ا ه وقطر م ح فليخرج من نقطة ط فى سطح مثلث ا ب ه خط ط س موازيا لا ه

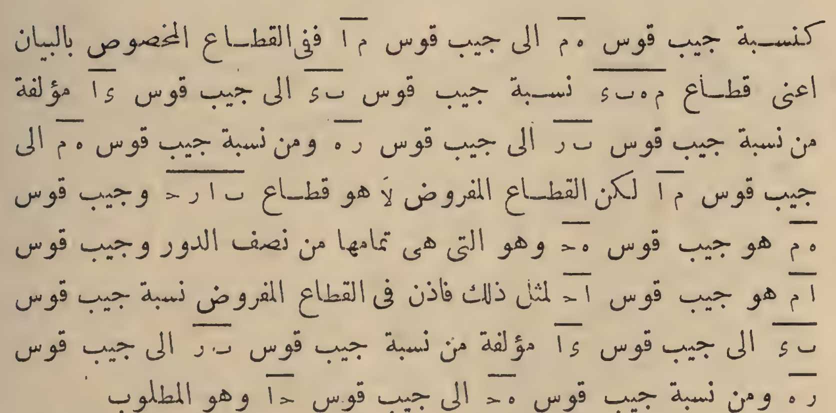


وفى سطح دائرة م ر ح ط ف موازيا لم ح ولكون ط ف ا ه موازيين لم ح يكونان متوازيين وايضا ط ف ط س الموازيان لا ه يكونان ايضا متوازيين وليكن تلاقيا على ط هذا خلف فاذن ط ك مواز لوتر ا ه وفى مثلث ب ا ه نسبة ب ط الى ط ا كنسبة ب ط الى ك ه لكن نسبة جيب قوس ب ى الى جيب قوس ى ا كنسبة ب ط الى ط ا ونسبة جيب قوس ب ر الى جيب قوس ر ه كنسبة ب ك الى ك ه ونسبة جيب قوس ب ى الى جيب قوس ى ا كنسبة جيب قوس ب ر الى جيب قوس ر ه ثم نقول وجيب قوس ا ح مساو لجيب قوس ح ه لان جيب قوس ا ح هو عمود ا ن جيب قوس ح ه هو عمود ه ع وهما متوازيان وقد وقعا بين ا ه م ح المتوازيين فاذن هما متساويان وتكون نسبة جيب قوس ب ى الى جيب قوس ى ا مؤلفة من نسبة جيب قوس ب ر الى جيب قوس ر ه المساوية لها ومن نسبة جيب قوس ح ه الى جيب قوس ح ا التى هى نسبة المساواة وهو المطلوب فاذن النسبة المدعاة مؤلفة من النسبتين المذكورتين على جميع التقديرات وذلك ما اردناه

واما فى سائر ضروب الدعوى الاولى فكلما كان الركن المعطل قوس ى ر ح والمثلث المعطل ب ا ه كان الشكل كما مر والبرهان على سياقة مثل هذه السياقة وكلما كان الركن المعطل قوس ب ر ه والمثلث المعطل ح ى ا كان التفاوت بحسب اختلاف الجهة فقط والشكل والبرهان كما كان والاولى ان لانطول الكلام بتفاصيلها

وذلك لما بين فى الشكل الثانى عشر من المقالة الاولى من كتاب الاكر لثاودسيوس الى ان الدوائر العظام تتقاطع متناصفة واذا اخرجنا نصف قطر حـ ح مر بنقطة م وليلاقى وتره ا على ل فيكون نقط ك ط ل الثلث على خط ك ط ل المستقيم لكونها فى سطح مثلث ا ب ه اوتار قسى المثلث المعطل وفى سطح دائرة ء ر حـ المعطلة فيحدث قطاع ب ل ه ا ل ط السطحى ويكون فيه نسبة ر ط الى ط ا مؤلفة من نسبة ب ل الى ل ه ومن نسبة ه ل الى ل ا ونسبة ب ط الى ط ا كنسبة جيب قوس ب ء الى جيب قوس ء ا ونسبة ب ك الى ك ه كنسبة جيب قوس ب ر الى جيب قوس ر ه ونسبة ه ل الى ل ا





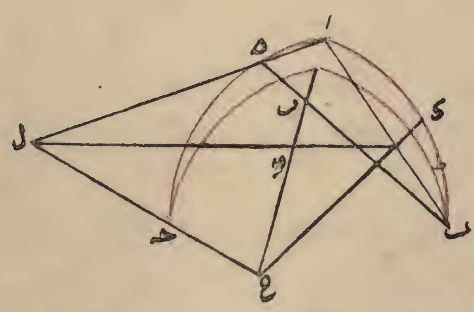

٢٦

كنسبة جيب قوس ه م الى جيب قوس م ا فى القطاع المخصوص بالبيان اعنى قطاع م ه ب ء نسبة جيب قوس ب ء الى جيب قوس ء ا مؤلفة من نسبة جيب قوس ب ر الى جيب قوس ر ه ومن نسبة جيب قوس ه م الى جيب قوس م ا لكن القطاع المفروض لا هو قطاع ب ا ر حـ وجيب قوس ه م هو جيب قوس ه حـ وهو التى هى تمامها من نصف الدور وجيب قوس ا م هو جيب قوس ا حـ لمثل ذلك فاذن فى القطاع المفروض نسبة جيب قوس ب ء الى جيب قوس ء ا مؤلفة من نسبة جيب قوس ب ر الى جيب قوس ر ه ومن نسبة جيب قوس ه حـ الى جيب قوس حـ ا وهو المطلوب

اما ان كان وتر ا ه موازيا لنصف القطر الذى عليه ح حـ فليتم نصفى دائرتى م ا حـ م ر حـ ايضاً كما مر ونصل قطر م حـ ونقول ط ك وقطر م حـ الكائنين فى سطح دائرة م ء حـ متوازيان لانهما ان لم يتوازيا فليلتقيا على نقطة وليكن على نقطة ل وحينئذ تكون نقط ل ا ه فى سطحي مثلث ب ا ه ودائرة م ا حـ فتكون

فتكون قوس ء ز ح الركن المعطل ومثلث ا ب ه المثلث المعطل ونصل خطوط ب ا ب ه ا ه المستقيمة وهى اوتار لمثلث ا ب ه وليكن ح مركز الكرة على الوجه ويخرج منه انصاف اقطار الى نقط ء ز ح الثلث التى هى على الركن المعطل وهى خطوط ح ء ح ز ح ح ويكون لامحالة كل واحد منهافى سطح دائرة من الدوائر التى منها القسى التى هى اضلاع المثلث المعطل ويكون وترتلك القوس التى هى الضلع ايضا فى ذلك السطح فلكون نصف قطر ح ء ووتر ب ا كليهما فى سطح دائرة ب ء ا يتلاقيان وليلتقيا على نقطة ط وايضا نصف قطر ح ز ووتر ب ه الواقعان فى سطح دائرة ب ز ه يتلاقيان على ك ولكون نصف قطر ح ح ووتر ا ه فى سطح دائرة ا ه ح فاذا اخرجا اما ان يتلاقيا او يتوازيا فان تلاقيا فاما ان يتلاقيا فى جهة ح ه او يتلاقيا فى جهة ح ا وليتلاقيا اولا فى جهة ح ه على نقط ل كما فى هذه الصورة فنقط ط ك ل الواقعة فى سطح مثلث ب ا ه الحادثة من اوتار المثلث المعطل لكونهـا جميعا على اضلاعه وفى سطح دائرة ء ز ح التى منها الركن المعطل لكونها على انصاف الاقطار المارة بنقط عليها يكون جميعا على فصلهما المشترك ولكونهما سطحين مستويين يكون الفصل المشترك بينهما خطا مستقيما فخط ط ك ل خط مستقيم وحدث منه ومن الاوتار الثلثة قطاع ب ط ا ه ل ك السطحى ويكون منه نسبة ب ط الى ط ا مؤلفة من نسبة ب ك الى ك ه ومن نسبة ه ل الى ل ا لكن نسبة ب ط الى ط ا كنسبة جيب قوس ب ء الى جيب قوس ء ا ونسـبة ب ك الى ك ه كنسـبة جيب قوس ب ز الى جيب قوس ز ه ونسـبة ه ل الى ل ا كنسـبة جيب قوس ه ح الى جيب قوس ح ا كل ذلك مما تبين فى المقالة الثالثة فاذن نسبة جيب قوس ب ء الى جيب قوس ء ا مؤلفة من نسبة جيب قوس ب ز الى جيب قوس ز ه ومن نسـبة جيب قوس ه ح الى جيب قوس ح ا وهو المطلوب وان كان الملاقاة بين وتر ا ه ونصف القطر الذى عليه ح ح فى جهة ا ح احتجنا الى قطـاع اخر من القطاعات الواقعة على سطح الكرة ليكون البيان مخصوصا بذلك القطاع ويحصل المطلوب بنقل ذلك البيان الى هذا القطاع المفروض والوجه فيه ان يخرج كل واحدة من قوسى ح ه ا ح ز ء الى ان يلتقيا فى الجهة الاخرى على نقطة م ويكون كل واحدة من قوسي ح ه م ح ز م نصف دائرة

الاولى على الترتيب وجب ان نعين اولا الركن والمثلث المعطلين بمثل ماتبين فيما مر ثم نصل بين نقط زوايا المثلث المعطل بخطوط مستقيمة هى اوتار القسى الثلث المحيطة بالمثلث المعطل ويخرج من مركز الكرة ثلثة خطوط مستقيمة الى النقط الثلث الواقعة على الركن المعطل وهى انصاف اقطار الكرة ولتلاقى هذه الخطوط اوتار قسى المثلث المعطل فتلقى كل نصف قطر يصل الى نقطة وتر من قوس يقع من تلك النقطة على ركن واحد لامحالة ويحدث بين انصاف الاقطار الثلثة والاوتار الثلث ثلاث نقط لتقاطعاتها تقع جميعا فى سطح المثلث الحادث من الاوتار الثلثة وفى سطح الدائرة التى يكون الركن المعطل جزؤا منها فتكون تلك النقط واقعة على الفصل المشترك بين السطحين وقد تبين فى كتاب الاصول لاقليدس ان الفصل المشترك بين كل سطحين مستويين انما يكون خطا مستقيما فذلك يكون الخط المار بالنقط الثلث المذكورة خطا مستقيما ويحدث منه ومن الخطوط الثلثة التى هى اوتار قسى المثلث المعطل قطاع سطحى بين النسب المؤلفة الواقعة فى القطاع الكرى بالنسبة المؤلفة الواقعة فيه باستعانة من المقدمات المذكورة فى المقالة الثالثة فان كان احد الاوتار الثلثة موازيا لاحد انصاف الاقطار المعتبرة فيه وقعت فيه نسبة مؤلفة من نسبة مساوية لها ومن نسبة المساواة او نسبة مساواة تتالف من نسبة ومن خلافها كما يتبين فيما بينته فليكن القطاع الكرى شكلا عليه نقط ا ب ح ء ه ر كما كانت على القطاع السطحى ولنتكلم اولا فى الضرب المعروف بتفصيل بطلميوس من الدعوى الاولى على الترتيب



وهو ان نقول نسبة جيب قوس ب ء الى جيب قوس ء ا مؤلفة من نسبة جيب قوس ب ر الى جيب قوس ر ه ومن نسبة جيب قوس ه ح الى قوس ح ا



اربعة وعلى كل ضلع مثلث لزم امكان وقوع كل مربع فى اربع قطاعات مثلا مربع ا ہ ح ـد يكون مع مثلثى ابـدحط مطلقا ومع مثلثى ابـد اء ہ قطاعا ثانيا ومع مثلثى اء ہ ہ حر قطاعا ثالثا ومع مثلثى ہ حر ح ـد ط قطاعا رابعاً ولكون المربعات ستة تكون جميع القطاعات الحادثة على بسيط الكرة من تقاطع الدوائر الاربعة اربعة وعشرون قطاعا لكن يكون كل قطاع نظيرا ومساويا لاخر مثلا قطاع م ں ر ہ اء يكون نظيرا ومساويا لشكل ب ـد ح ط لان ركن م ں ر من القطاع الاول مساو لركن ح ـد ر من القطاع الثانى فان م ں ر ح نصف دائرة لوجوب تناصف كل عظيمتين تقعان على بسيط كرة كما بينه ثاؤذوسيوس فى المقالة الاولى فى الشكل الثانى عشر منه وايضا ر ح ـد ب نصف دائرة واذا القينا ر ح المشترك يبقى ركن م ء ہ مساو لركن ح ـد ب فى القطاعين وبمثله تبين ان ركن م ء ہ مساو لركن ح ط ں وركن ا ہ ر لركن ک ل ب وركن اء ں لركن ک ط ـد وايضا بمثل ذلك تبين ان ضلعى كل مثلثين نظيرين من مثلثات القطاعين وكل مربعين من مربعيهما متساويان وان كل زاويتين نظيرتين متساويتان وتبين من ذلك ان اثنى عشر قطاعا من الاربعة والعشرين المذكورة تكون نظائر للاثنى عشر الاخرى والنسب الواقعة بين خطوط القطاع السطحى التى تشتمل عليها الدعاوى الثلثة المذكورة تقع ههنا بين جيوب قسى هذا القطاع كما كان هناك من غير اختلاف فى شئ ولاحاجة بنا الى اعادتها فلنتكلم فى البراهين عليها

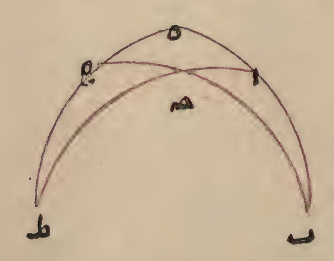
الفصل الثانى

فى الاشارة الى البراهين على وجه كلى وفى اقامة البرهان على ضرب من الدعوى الاولى المعروف بتفصيل بطلميوس

نقسم البرهان اولا على ضروب الدعوى الاولى المرتبة حتى يمكن لنا ان نتكلم فى بيان ماعداها من النسب الواقعة فى الدعاوى الثلثة فنقول اذا اردنا ان نبين تأليف النسبة الواقعة بين جيبى قوسين فى القطاع الكرى من نسبتين تقعان بين جيوب اربع قسى تكون القسى الستة واقعة وقوعها فى الدعوى

الدائرة الاولى هى اب بل لك كز زه ها والستة التى من الدائرة الثانية هى زن نم مب بج جح حز والستة التى من الدائرة الثالثة هى اد دن نك كط طج جا والستة التى من الدائرة الرابعة هى ده هح حط طل لم مد واما المربعات الستة فمربع ادمب ومربع بلطج ومربع جحها ومربع هزند ومربع منكل ومربع طكزح واما المثلثات الثمانية فمثلث ابج ومثلث اده ومثلث دنم ومثلث مبل ومثلث لكط ومثلث طجح ومثلث حزه ومثلث لنك وظاهر ان الزاويا المقابلة انما وقعت فى الاشكال المتجانسة مثلا الزاويتان المتقابلتان عند ا انما وقعتا اما فى مثلثى داه ابج واما فى مربعى دابم اهحج والاضلاع المشتركة وقعت بين الاشكال المخالفة مثلا ضلع اب اشترك فيه مثلث اجب ومربع ابدم واذا تقرر هذا فنقول كل مربع من هذه المربعات مع مثلثين يكونان على ضلعين متجاورين من اضلاع المربع يقع على هيئة القطاع السطحى لاشتماله على اربعة اركان متقاطعة على ست نقط يحدث منها اثنا عشر قوسا كل ثلث منها على ركن واربعة مثلثات محيط بكل واحد ثلثة خطوط وبالجملة على ما قيل فى ذلك الشكل فيما م فالشكل الحادث من المربع والمثلثين المذكورين هو القطاع الكرى

مثاله اذا اعتبرنا مربع اهحج مع مثلثى ابج جحط الواقعين على ضلعى اج جح المتجاورين فيه كانت هكذا وهو مثل القطاع السطحى بعينه



الا فى شئ واحد وهو ان الشكل هناك تألف من خطوط مستقيمة على سطح مستو وههنا من قسى دوائر عظام على سطح كرة ولما كان لكل مربع اضلاع

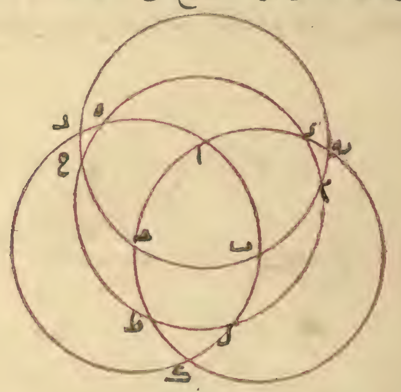
المقالة الرابعة

فى الشكل القطاع الكرى والنسب الواقعة فيه وفيه خمسة فصول

الفصل الاول

فى بيان ماهيه الشكل القطاع الكرى والاشارة الى دعاوى النسب الواقعة فيه

اذا تقاطعت اربع دوآئر من العظام على سطح كرة بحيث لايتقاطع على نقطة اكثر من ثنتين حدثت بينهما اثنتا عشرة نقطة عليها تتقاطع تلك الدوائر وتنقسم كل واحدة منها بست قسى يكون كل واحد ضلعا لشكل ويكون مجموعها اربعا وعشرين قوسا وينقسم سطح الكرة باربعة عشر قسما ستة منها مربعات وثمانية مثلثات ويكون كل ضلع من الاضلاع المذكورة فيما بين مثلث ومربع وكل زاوية من شكل مقابلة لزاوية من شكل آخر من نوع الشكل الاول فتكون المربعات الستة متلاقية على زواياها وملاقية للمثلثات على اضلاعها وكذلك المثلثات وهذه صورتها فالدوآئر الاربع هى دائرة ا ب ك ز ودائرة ب ج ز ن



ودائرة ا ج ك ن ودائرة د ه ط ل ونقطة التقاطعات الاثنى عشر نقطة ا ب ج د ه ز ح ط ك ل م ن واما الاضلاع الاربعة والعشرون فالستة التى من



ان كان تفاضل (نصف قوس اب) القوس اكثر من الربع كما فى الوجه الخامس يجمع (خط اح) حاصل التالى وجيب تمام التفاضل (خط حء) من الربع فاحصل فهو المحفوظ (خط اء) وان التفاضل (نصف قوس اب) اقل من الربع كما فى الوجوه الثلثة الاولى وجدنا الفضل بين (خط اح) حاصل التالى وجيب (خط حء) تمام التفاضل فا حصل فهو المحفوظ (خط اء) ثم ناخذ جذر مجموع مربع (خط اء) المحفوظ ومربع جيب (خط ءب) التفاضل ونقسم الحاصل من ضرب جيب (خط ءب) التفاضل فى ستين (با على انه ستون) على ذلك الجذر فاخرج فهو جيب (جيب زاية اَ) نقوسه فهو اما القوس (نصف قوس بء) المعلومة التى هى نظيرة للمقدم وهى القوس الصغرى وذلك فى الوجه الثالث الذى كان فيه الفضل لحاصل التالى واما تمام (نصف قوس باح) القوس الصغرى من نصف الدور وذلك فى الوجه الاول الذى كان فيه الفضل لجيب تمام التفاضل اما ان يساوى حاصل التالى وجيب تمام التفاضل كما فى الوجه الثانى كانت (نصف قوس بح) القوس الصغرى النظيرة للمقدم ربعا للدور وان كان (نصف قوس اب) تفاضل القوسين ربعا للدور كما فى الوجه الرابع ناخذ جذر مجموع مربعى (قطر حر) المقدم (وقطر اح) التالى ونقسم على ذلك (قطر اب) الجذر الحاصل من ضرب المقدم نصف القطر فى ستين فا حصل فهو (نصف بح) جيب القوس الصغرى وههنا تم العمل وهذه الصورة اعنى التى يكون فيها مجموع القوسين او الفضل بينهما ربع دور يقع فى الاعمال النجومية كثيرا ولها بيان اخر وهو ان نقول لما كانت نسبة مقدم الى تال كنسبة جيب قوس الى جيب تمامها كانت نسبة مربع المقدم الى مربع التالى كنسبة مربع جيب قوس الى مربع جيب تمامها وبالتركيب نسبة مجموع مربعى مقدم وتال الى مربع احدهما كنسبة مجموع مربعى جيب قوس وجيب تمامها اعنى مربع نصف القطر الى احد المربعين ونسبة جذر مجموع مربعى مقدم وتال الى المقدم او التالى كنسبة نصف القطر الى جيب تلك القوس او الى جيب تمامها ويكون العمل كما تقدم وفائدة هذه الاعمال تبين جيب يكون المطلوب معرفة قوس ما من قوسين مجهولين مجموعهما او الفضل بينهما معلوم ويصير من الشكل القطاع كما يتبين فيما بعد نسبة جيب احديهما الى جيب الاخرى معلومة فيكون الطريق الى استخراج المطلوب بعينه هذه التى اومأنا فى هذا الفصل اليه والله أعلم



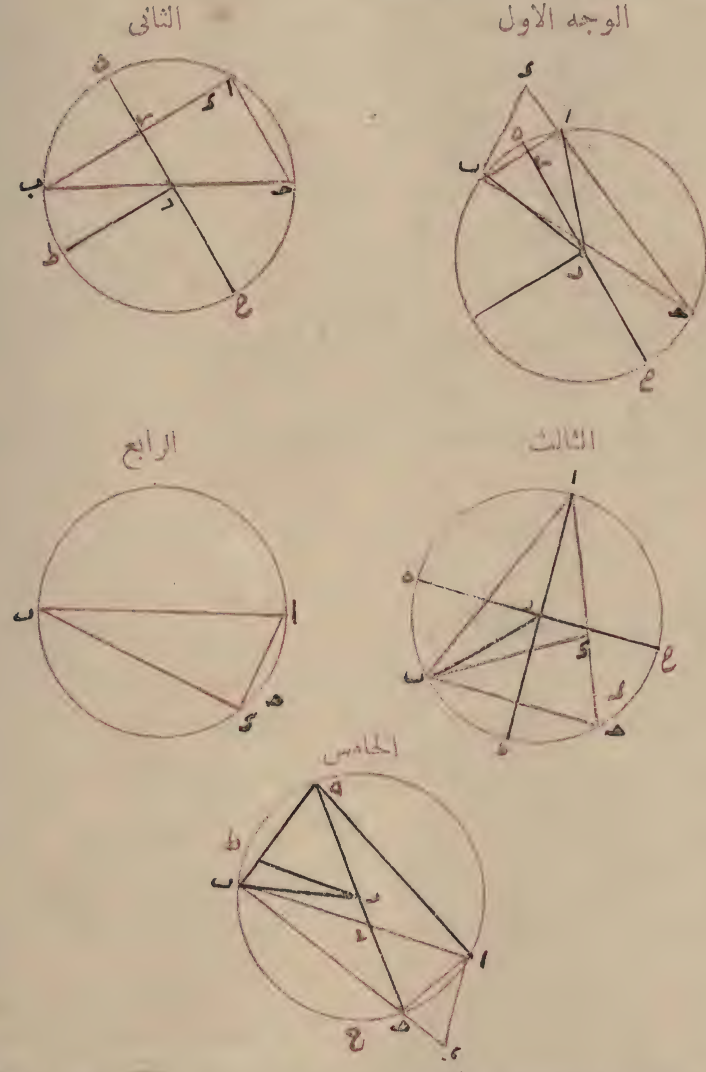
مؤامرة العمل الاول لهذا الوجه

يضرب (قطر خط اح) تالى النسبة المعلومة فى ستين (نصف القطر وهو ب ح) ونقسمه على المقدم (قطر خط حر) فما حصل سميناه (خط اح على ا ب ح ستون) حاصل التالى فان كان مجموع القوسين (نصف قوس ا حر) اصغر من الربع كما فى الوجه الخامس نزيد حاصل التالى (خط اح) على (خط حء) جيب تمام مجموع القوسين من الربع ويسمى المبلغ بالمحفوظ (خط اء) وان كان مجموع (قوس ا حر القوسين) اكبر من الربع كما فى الوجوه الاول والثانى والثالث ناخذ الفضل بين حاصل الثانى على جيب (خط حء) تمام مجموع القوسين من الربع فما حصل فهو المحفوظ (خط اء) ثم نجمع مربع المحفوظ (خط اء) ومربع جيب (خط ا ب) مجموع القوسين (خط ب ا على ا ب ح ستون) وناخذ جذره ونقسم ما حصل من ضرب جيب (خط ء ب) مجموع القوسين (ا ب على ا ر نصف القطر) فى ستين عليه فما خرج نقوسه فى جدول الجيب (جيب زاوية أ) وننظر ان كان الفضل الحاصل التالى كما فى الوجه الثالث كان (نصف قوس ب ا ح) تلك القوس هى المطلوبة وهى التى كانت نظيرة للمقدم وان كان الفضل لجيب تمام مجموع القوسين كما فى الوجه الاول كانت تلك القوس (نصف قوس ب ا ح) تمام القوس المطلوبة المذكورة من نصف الدور وان تساويا كما فى الوجه الثانى كانت القوس المطلوبة التى هى نظير للمقدم ربع الدور وان كان مجموع القوسين (قوس ا ح ب) ربعا للدور كما فى الوجه الرابع ناخذ جذر مجموع مربعى (قطر ح ب) المقدم والتالى (قطر اح) ونقسم الحاصل من ضرب المقدم فى ستين نصف القطر على ذلك الجذر (قطر ا ب) فما خرج نقوسه فى جدول الجيب لتكون القوس الخارجة (نصف ب ح) هى المطلوبة التى هى نظيرة للمقدم وذلك تمام العمل

مؤامرة العمل الثانى

نضرب تالى قطر خط اح النسبة المعلومة فى ستين بعد (القطر وهو ب ح) ونقسمه على المقدم (قطر ح ب) بشرط ان يكون المقدم هو الذى يكون نظيرا للقوس (قوس ح ب) الصغرى فما حصل (اح على ا ر ب ح ستون) فهو حاصل التالى ثم

معلوما فيكون اء معلوما ومن اء ءب المحيطين بالزاوية يكون اب بالمقدار الذى يكون ب ح ستين معلوما لان زاوية ب ح ء منه اعنى ب ح ا معلومة لكون قوس ب ا معلومة فيصير ب ح بالاعتبار الذى به اب وتر معلوم معلومة ويصير من وتر ب ح قوس ب ح معلوما وهو المطلوب



الخطوط السود ليست من الاصل وانما رسمت ليتبين ان ح ء جيب تمام مجموع القوسين فلينظر فيه

و يضعف ما خرج من القسمة خط ب ه و ينقص منه خط ح د جيب نصف التفاضل بين القوسين منه فما بقى نسميه بالمحفوظ خط ح ه ثم نأخذ جذر مجموع مربع المحفوظ ومربع جيب تمام نصف التفاضل بين القوسين خط ح ر من ربع الدور و يضرب المحفوظ خط ح ه فى ستين نصف الخط و نقسمه على ذلك الجذر خط ر ه فما خرج نقوسه فى جدول الجيب زاوية ح ر ه و نزيد على ما خرج نصف التفاضل بين القوسين فما بلغ فهى القوس قوس ب ه ر الكبرى و ننقصه منه ايضا فما بقى فهى القوس قوس د ا الصغرى و يحصل المطلوب وهذا العمل انما يتم ههنا اذا كان جيب القوس الكبرى اعظم من جيب القوس الصغرى اما ان كان جيب القوس الكبرى اصغر وجيب القوس الصغرى اكبر اخذنا تمامهما من نصف الدور فيكون تمام الكبرى هى القوس قوس ا ب الصغرى و تمام الصغرى هى القوس الكبرى قوس ا د و تم العمل و ان تساوى الجيبان اعنى يكون مقدم النسبة و تاليها متساويين لم نحتج الى هذه الاعمال بل اخذنا نصف تمام التفاضل من نصف الدور فتكون هى القوس الصغرى و تمامها من نصف الدور هى القوس الكبرى

﴿ وجه اخر للامير ابى نصر بن عراق ﴾

ترسم دائرة وتقدر ان قوس ا د د ب منها ضعفا القوسين المجهولتين اللتين مجموعهما ونسبة جيب احديهما الى جيب الاخرى معلومتان او ان قوسى ا ب د ب د ضعفا القوسين اللتين فضل احديهما على الاخرى فهو نصف قوس ا ب ونسبة جيبيهما معلومتان ونصل اوتار ا ب ب د د ا فيكون وتر ا ب الذى هو وتر ضعف مجموع القوسين او وتر فضل احديهما على الاخرى معلوما ووترا ا د د ب اللذان هما وترا ضعف قوسين مجهولين مجهولين و يخرج من نقطة ب على وتر ا د عمود ب ء ولا يخلو وقوعه من خمسة اوجه اما ان يقع خارج المثلث من جهة ا ه واما ان ينطبق على ب ا واما ان يقع داخل المثلث واما ان ينطبق على ب د واما ان يقع خارجا من جهة د وعلى التقديران يكون فى مثلث ب ء د القائم الزاوية ضلعا ب ء ء د بالمقدار الذى به يكون ب د ستين معلومين ولكون نسبة ب د الى ا د معلومة يكون ا د بذلك المقدار ايضا

معلوما فحه معلوم و حر جيب تمام نصف بح معلوم ففى مثلث حره القائم الزاوية ضلعا حر حه معلومان فزاوية حره معلومة وزاوية حرح التى هى بقدر نصف قوس بح معلوم فزاوية حرا معلومة وهى بقدر قوس اح فهى معلومة وقوس اب معلومة وذلك ماردناه فظاهران جيب اب ان كان اعظم من جيب اح كان الالتقاء فى جهة اَ وان كان اصغر منه كان الالتقاء فى جهة ءَ وان كان مساويا له كان الوتر موازيا للقطر

مؤامرة العمل الاول مجردة عن البرهان

نضرب خط بح جيب نصف مجموع القوسين فى مقدم النسبة المعلومة او فى تاليها ايهما كان اعظم ونقسم الحاصل على مجموع مقدمها وتاليها ونضعف خط هح الخارج من القسمة وننقص منه جيب نصف مجموع القوسين مما بقى نسميه المحفوظ خط هح ثم نأخذ جذر مجموع مربع المحفوظ ومربع جيب تمام نصف مجموع القوسين خط حر من الربع ونضرب المحفوظ فى ستين ونقسمه على ذلك الجذر خط هر فاخرج نقوسه فى جدول الجيب ونزيد تلك القوس زاوية هرح على نصف مجموع القوسين فاحصل فهو القوس الكبرى قوس اح وننقصها منه فاحصل فهو القوس الصغرى قوس با وذلك ماردناه وانما يتم هذا العمل اذا كان مجموع القوسين اقل من نصف الدور ولا يقع فى الاعمال النجوميه الا كذلك اما ان فرض مجموع القوسين قوس بءح اكثر من نصف الدور واقل من الدور وكان كل واحد منهما اقل من نصف الدور نقصنا كل واحدة منهما من نصف الدور فابقيت من القوس الصغرى قوس با كانت هى القوس الكبرى قوس بح وما بقيت من الكبرى قوس اح كانت هى الصغرى قوس حى وحصل المطلوب وان كان مجموع القوسين نصف الدور اوالدور كله لم يمكن معرفة القوسين بهذا الوجه

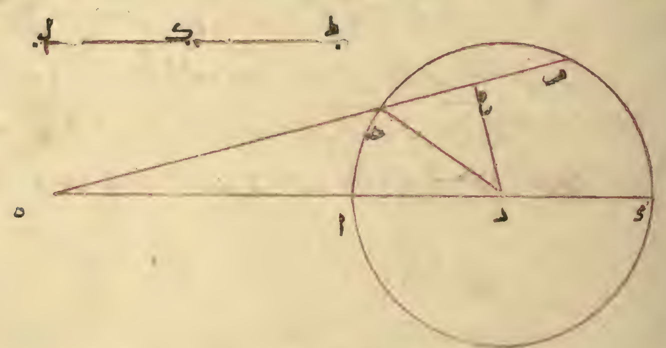
مؤامرة العمل الثانى مجردة عن البرهان

يضرب خط حح جيب التفاضل بين القوسين فى مقدم النسبة المعلومة اوفى تاليها ايهما كان اعظم و يقسم الحاصل على الفضل بين المقدم والتالى

نقطة ز عمود زح على ب ج ويصل ب ز فلكون قوس ب ا ج معلومة يكون وتر ب ج معلوما ولكون نسبة جيب قوس ب ا الى جيب قوس ا ج معلومة تكون نسبة ب ه الى ه ج معلومة فليكن كنسبة ط ك الى ك ل ونسبة ب ج الى ب ه كنسبة ط ل الى ط ك فب ه معلوم و ه ج معلوم وكان ب ح نصف ب ج معلوما فه ح معلوم و زح جيب تمام نصف قوس ب ج معلوم وفى مثلث ه زح القائم الزاوية ضلعا ه ح ح ز المحيطان بالقائمة معلومان فزاوية ه زح معلومة وزاوية ب زح التى هى بقدر نصف قوس ب ا ج معلومة فزاوية ب ز ا الباقية معلومة وهى قدر قوس ب ا معلومة وتبقى قوس ا ج معلومة ايضاً وذلك ما اردناه

وايضاً اذا انطبقت فى دائرة قوس على اخرى غير مساوية لها وكانت مبدأهما نقطة واحدة وكانت كل واحدة منهما اصغر من نصف المحيط وكان فضل احديهما على الاخرى معلومة ونسبة جيب احديهما الى جيب الاخرى معلومة كانت كل واحدة منهما معلومة فليكونا فى دائرة ا ج ب قوسى ا ب ا ج اللتين مبداهما ا وليكن قوس ب ج الفضل بينهما معلوما ونسبة جيب ا ب الى جيب ا ج معلوم اقول فكل واحدة من قوس ا ب ا ج معلوم

برهانه نصل قطر ا ى ونخرجه ونخرج وتر ب ج الى ان يتلاقيا على ه ونخرج من ز المركز عمود زح على ب ج ونصل ج ز ولكون ب ج وتر الفضل معلوما فنصفه ح ج معلوم ولكون نسبة جيب ا ب الى جيب ا ج معلوماً فنسبة ب ه الى ج ه معلومة وليكن كنسبة ط ل الى ك ل ونسبة



ب ج الى ج ه كنسبة ط ك الى ك ل فب ه معلوم و ج ه معلوم وكان ح ج

التى يوترها الضلع المعلوم الى جيب زاوية اخرى كنسبة الضلع المعلوم الى الذى هو وتر الزاوية الاخرى فتصير الاضلاع معلومة

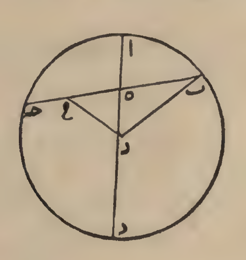
واما فى سائر المثلثات فان كان المعلوم زاويتين وضلعا عرف الضلعان الباقيان بما ذكرناه فى القائم الزاوية وان كان ضلعين وزاوية فان لم تكن الزاوية بينهما كانت نسبة الضلع الذى يوتر الزاوية المعلومة الى الضلع الاخر كنسبة جيب الزاوية المعلومة الى جيب الزاوية التى يوترها الضلع الاخر واذا عرفت الزاويا عرفت الضلع الباقى وان كانت الزاوية متحللة كان حكمها كما مر وان كان المعلوم هو الاضلاع الثلثة استخرج العمود بمثل ما مر ثم تعرف الزاويا بمثل ما تعرف به فى القائم ولنختم الكلام فى المثلثات ههنا

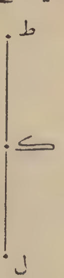
الفصل الثالث

فى بعض القوانين التى لا تتم فائدة الشكل القطاع الا بمعرفتها

اذا اتصلت قوسان مختلفتان من دائرة على نقطة مجموعهما معلوم وكانتا معا اقل من نصف محيطها وكانت نسبة جيب احديهما الى جيب الاخرى معلومة كان كل واحدة منهما معلومة فليكونا فى دائرة ا ب ح قوسى اب اح المتصلين على ا وليكن مجموع ب اح معلوماً وهو اقل من نصف الدائرة ولتكن نسبة جيب قوس اب الى جيب قوس اح معلومة اقول فكل واحدة من قوسى اب اح معلومة

برهانه يخرج وتر ب ح وقطر ا ى فيتقاطعان على ه ومن المركز وهو

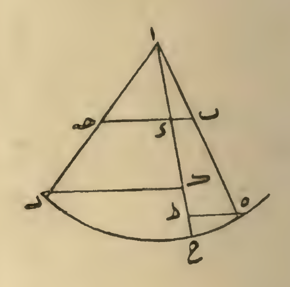




قائمة وعمود هط جيب زاوية ا لان جيب تمام هح من الربع اعنى تمام آمن قائمة فخط طا جيب زاوية ب وايضا فى مثلث اىحـ تكون زاوية حـ تمام زاوية ا من قائمة وعمود كر جيب زاوية ا وخط كا جيب زاوية حـ ولتشابه مثلثى اىب اهط تكون نسبة اب الى اى كنسبة اه نصف القطر الى اط ايضاً ولتشابه مثلثى ادحـ اكر تكون نسبة اى الى احـ كنسبة اك الى ار نصف القطر بل اه فبالمساواة المضطربة نسبة ضلع اب الى احـ كنسبة كا الذى هو جيب زاوية حـ الى اط الذى هو جيب زاوية ب وذلك ماردناه

٢١

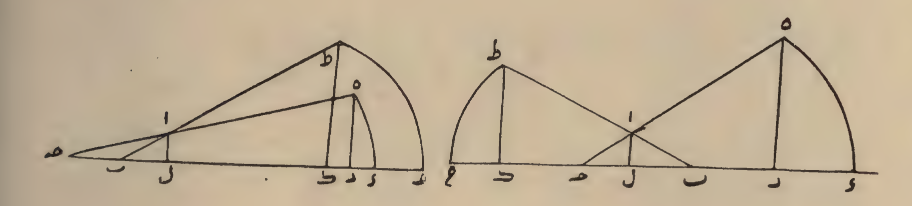




وبعد تقديم هذه المقدمة نقول لما كانت الزاويا المحيطية انصاف الزاويا المركزية اذا كانتا على قوس واحدة وكان نصف المحيطية مقدار المركزية المساوية لها ولذلك يكون مقدار القائمة الكائنة على المركز ربع الدور لان الزوايا انما تتناسب بتناسب القسى فكما كانت المركزية ضعف المحيطية عند تساوى قوسهما تكون قوس المحيطية ضعف قوس المركزية عند تساويهما فلذلك يكون قوس نصف المحيطية اعنى مقدارها كقوس المركزية المساوية لها ومقدار جميع زاويا المثلث نصف الدور والجيوب انصاف الاوتار واذا استعملنا الجيوب فى مقادير الزاويا بدل الاوتار تكون الزاويا مركزيات فاذا كان مثلث قائم الزاوية وعرفنا اضلاعه بطريق الجيوب كانت نسبة وتر القائمة الى ضلع آخر كنسبة نصف القطر الى جيب الزاوية التى يوترهاذلك الضلع الاخر الا على ان المعلوم من المثلث ضلعان فيعلم الثالث كما تقدم ثم ستعلم الزاويا بما ذكر ههنا ومن الجيب تصير الزاوية معلومة وان كان المعلوم منه ضلعا وزاوية عرفنا الزاويا وكانت نسبة جيب الزاوية

ب ج مثلا وبين مربع ا ج ويقسم على ضعف ب ج فما خرج فهو ما بين زاوية ب وموقع العمود الخارج من ا على ب ج لاخذ جذر فضل مربع ا ب عليه فهو العمود ويحدث من العمود ومن ضلعى ا ب ا ج ومما يكون بين موقع العمود وبين زاويتى ب ج مثلثان قائما الزوايا فسيعرف زواياهما ويعرف منها زوايا مثلث ا ب ج فهذا بطريق القسى والاوتار اما بطريق القسى والجيوب فلنقدم لها مقدمة وهى ان نقول نسبة كل ضلع من مثلث الى ضلع اخر منه كنسبة جيب الزاوية التى يوترها الضلع الاول الى جيب الزاوية التى يوترها الضلع الثانى فليكن المثلث ا ب ج نقول فنسبة ضلع ا ب الى ضلع ا ج منه كنسبة زاوية ا ج ب الى زاوية ا ب ج

برهانه يخرج ج ب الى ان يصير ج د ستين وترسم على مركز ج وببعد ج د قوس



د ه ويخرج ج ا الى ان تلقاها على ه ويخرج من ه عمود ه ز على ج د فهو جيب زاوية ا ج ب وايضا يخرج ب ج الى ان يصير ب ح ستين وترسم على مركز ب وببعد ب ح قوس ط ح ويخرج ب ا الى ان تلقاها على ط ويخرج من ط عمود ط ك على ب ح فهو جيب زاوية ا ب ج ويخرج من ا على قاعدة ب ج عمود ا ل فلتشابه مثلثى ا ب ل ط ب ك تكون نسبة ا ب الى ا ل كنسبة ط ب نصف القطر الى ط ك ولتشابه مثلثى ا ل ج ه ز ج تكون نسبة ا ل الى ا ج كنسبة ه ز الى ه ج نصف القطر بل الى ط ب فبالمساواة المضطربة نسبة ا ب الى ا ج كنسبة ه ز جيب زاوية ا ج ب الى ط ك جيب زاوية ا ب ج وذلك ما اردناه

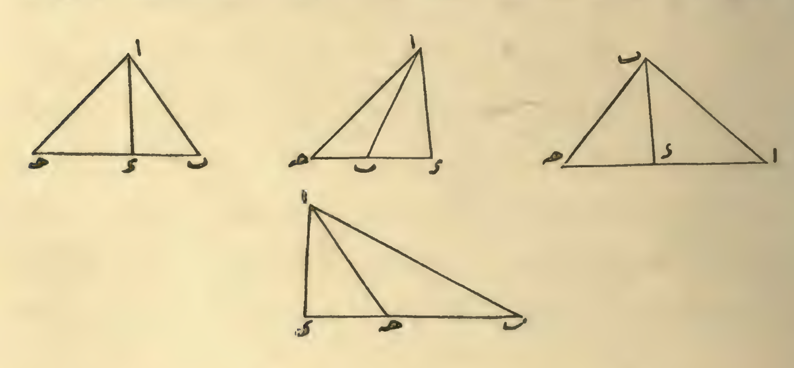
وبوجه اخر يخرج عمود ا د على ضلع ب ج ويخرج ا ب ا ج الى ان يصيرا عند نقطتى ه ز ستين ستين اعنى بقدر نصف القطر وترسم قوس ز ه ح ويخرج عمود ا د الى ح ويخرج عمودى ه ط ز ك على خط ا ح ونقول لما كانت فى مثلث ا ب د زاوية د قائمة كانت زاوية ب تمام زاوية ا من

زاويتين او زاويتين وضلعا او زاوية وضلعين او ثلثة اضلاع وهذه اربعة مسائل الاولى ان يكون المعلوم زاويتين ويعرف منه الزاوية الباقية لانها يكون تمام مجموعهما من الدور وتصير الاوتار من الزوايا معلومة بالمقدار الذى به القطر مائة وعشرون وحينئذ يصير المثلث معلوم الصورة ولا يعرف منه مقادير الاضلاع

الثانية ان يكون المعلوم زاويتين وضلعاً وتصير الزاوية الباقية معلومة وتصير الاوتار الثلثة معلومة وتكون نسبة وتر الزاوية التى يوترها الضلع المعلوم الى وتر زاوية اخرى بالمقدار الذى به القطر مائة وعشرون كنسبة الضلع المعلوم الى الضلع الذى يوتر الزواية الاخرى ويصير ذلك الضلع معلوما وبمثله يصير الضلع الباقى معلوما

الثالثة ان يكون المعلوم زاوية وضلعين فان كانت الزاوية موترة باحدهما كانت نسبة الضلع الذى يوتر الزاوية المعلومة الى الضلع الاخر كنسبة وتر الزاوية المعلومة الى وتر الزاوية الاخرى بالمقدار الذى به القطر مائة وعشرون فيصير وتر الزاوية الاخرى ثم قوسها ثم الزاوية الباقية معلومة ومنها يصير الضلع الباقى معلوما وان كانت الزاوية متحللة بين الضلعين كزاوية اَ بين ضلعى ا ب ا ﺣ اخرجنا من بَ على ا ﺣ عمود ب ٮ فيحدث مثلث ا ٮ ب القائم الزاوية وعرفنا فيه من زاوية اَ وضلع ا ب ضلعى ب ٮ ا ٮ ويبقى ٮ ﺣ معلوما ويعرف من ب ٮ ٮ ﺣ ضلع ب ﺣ وزاوية ﺣَ كما مر

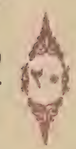
الرابعة ان يكون المعلوم اضلاع المثلث الثلثة وليكن المثلث ا ب ﺣ فيستخرج اولا عموده على عادة الحساب بان يؤخذ الفضل بين مربعى ب ا



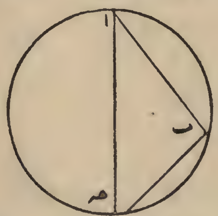
فنقول ان كان المعلوم منه ضلعا واحدا فقط لم يمكن ان يعرف منه غيره فاذن يجب ان يكون المعلوم اما زاوية غير القائمة واما ضلعين واما ضلع وزاوية غير القائمة وهذه ثلث مسائل الاولى ان يكون المعلوم زاوية غير القائمة ومنها تصير الباقية معلومة لانها تكون تمام المعلومة من نصف الدور

واما القائمة فقدارها نصف الدور ايضا ويصير من ذلك المثلث معلوم الصورة اى معلوم الزاويا ونسبة بعضها الى بعض يعنى ونسبة بعض اضلاعه اذ تصير الاوتار التى هى الاضلاع من الزوايا المعلومة تمام القطر مائة وعشرون ولا تصير مقادير اضلاعها معلومة

الثانية ان يكون المعلوم منه ضلعين ويعرف منهما الضلع الثالث بان يؤخذ جذر مجموع مربعيهما ان كان الثالث وتر القائمة اوجذر فضل مربع احدهما على الاخر ان لم يكن واذا عرفت الاضلاع عرفت الزوايا منها وليكن المثلث ا ب ح وليحيط به دائرة فنسبة ا ح وتر القائمة الى ا ب بالمقدار المعلوم كنسبة مائة وعشرين جميع القطر الى ا ب بالمقدار الذى به القطر مائة وعشرين واذا عرفت ا ب بذلك المقدار عرفنا منه قوس ا ب وهى مقدار زاوية ا ح ب ويكون ما بقى بعد نقصانها من نصف الدور مقدار زاوية ب ا ح



الثالثة ان يكون المعلوم ضلعا وزاوية ومن الزاوية تصير الزاوية الباقية معلومة وتكون اوتار الزوايا اعنى اضلاع المثلث بالمقدار الذى يكون به وتر القائمة اعنى القطر مائة وعشرين وتكون نسبة الضلع المعلوم الى ضلع اخر



كنسبة وتر الزاوية التى يوترها الضلع الاخر بالمقدار الذى يكون به وتر القائمة مائة وعشرين فبذلك يصير الضلع الاخر معلوماً وكذلك فى الضلع الثالث

واما فى سائر المثلثات فان كان المعلوم ضلعا واحدا او ضلعين او زاوية واحدة فقط لم يصر شئ غير ذلك منها معلوما فاذن يجب ان يكون المعلوم اما

اء ح وقع حدا ت و ح لامحالة فى احد جانبى القطر ولايمكن ان يلاقى الوتر القطر الا خارج الدائرة وصار الشكل كشكل التركيب واما فى التركيب اوكان احديهما اب والاخرى اء ح وقع الحدان فى جانبى القطر ولاقى الوتر القطر فى الداخل وصار الشكل كشكل التفصيل وهذا تمام الكلام فيه

الفصل الثانى

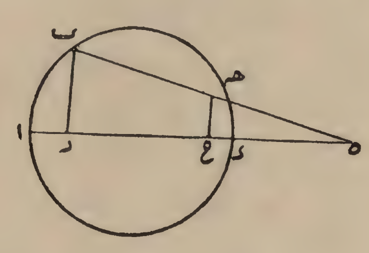
فى معرفة اضلاع المثلثات وزوايا بعضها من بعض

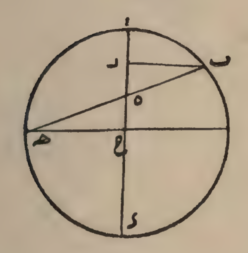
كل ضلع من مثلث مستقيم الاضلاع تحيط به دائرة يكون وتر القوس يقع زاوية من زوايا المثلث على تلك القوس ولذلك يعبرون عن ذلك الضلع بانها وتر تلك الزاوية والمراد وتر قوس تلك الزاوية ولكون الزوايا فى التناسب كالقسى التى تقع عليها تلك الزوايا اقاموا القسى فى المقادير مقام الزوايا فيقولون لكل قوس مقدرة انها مقدار الزاوية التى تقع عليها ومحيط الدآئرة كله يكون مقدار ثلث زوايا من كل مثلث تحيط به تلك الدآئرة والجمهور من المنجمين قسموا كل محيط بثلثمائة وستين جزؤاً والقطر بمائة وعشرين جزؤاً ما خلا ابا الريحان البيرونى المبرز فى هذه الصناعة فانه قسم القطر لجزؤين هما مائة وعشرون دقيقه موافقة بالعدد لقسمة غيره وجعلوا تلك الاجزآء معيار التقدير و بينوا بذلك طرق معرفة القسى والاوتار والجيوب بعضها من بعض بحسب الاصول الهندسية كما ذكر فى صدر المجسطى وغيره من الكتب وبعد تقديم هذه المقدمات نقول كثيرا ما يقع فى الاعمال النجومية وفى الاشكال التى يقصد بيانها الاحتياج الى تعرف مقادير اضلاع المثلثات المستقيمة الخطوط وزواياها بعضها من بعض ولا بد فى ذلك من كون البعض معلوما حتى يمكن تعرف البعض الاخر منه ولذلك قوانين مبنية اما على اوتار القسى او على جيوبها ولنبدأ بما يكون مبنيا على الاوتار وبالمثلث القآئم الزاوية

محصلا ولامحتاجا الى البيان ويمكن ان يقرر الشكلان بدعوى و برهان واحد بان يقال قوسا اب اح المختلفتان من دائرة اب ح ب ح اشتركتا فى احد حديهما وهو ا واختلف حداهما الاخر وهما ب ح وقد التقى وتر ب ح قطر ا ى على نقطة ه فاقول نسبة ب ه الى ه ح كنسبة جيب قوس اب الى جيب ....



برهانه يخرج عمودى ب ر ح ح على قطر ا ى فهما الجيبان ويحدث مثلثا ب ر ه ه ح ح متشابهين لتساوى زاوية ه فيهما وكون زاويتى ر ح قائمتين فاذن نسبة ب ه الى ه ح كنسبة ب ر الى ح ح وذلك ماردناه

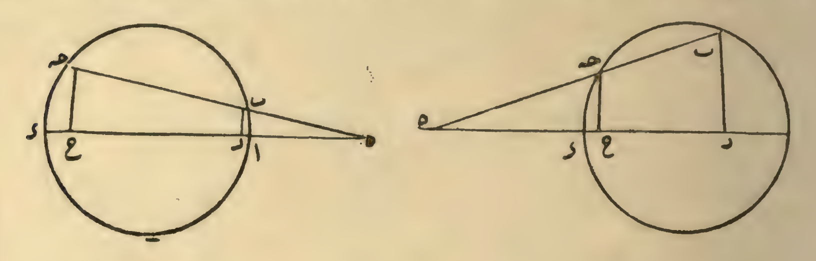




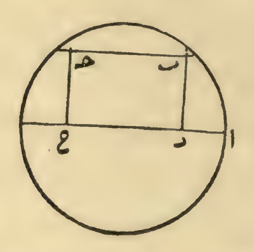
وظاهران التفاوت بينهماهو التفاوت الراجع الى التفصيل والتركيب واعلم ان تقييد الدعوى بكون كل واحدة من القوسين اصغر من نصف دائرة ليس بواجب فان الدعوى مطلقة صحيحة اذا كان للقوسين جيب اما اذالم يكن لهما اولا حدهما جيب بان تكون نصف دور اودورا تاما فلا يمكن ان يكون هناك دعوى من هذا الوجه وانما قيدوها به لشيئين احدهماعدم الاحتياج الى غير تلك الصورة فان القسى الواقعة فى القطاع تكون ابدا اصغر من نصف الدور والثانى ان فى بيان سائر الصور يقع اختلاف وذلك ان هذين القوسين اماان يكونا اصغر من نصف الدور اويكونا نصفى الدور او يكونا اعظم من نصف الدور او يكون احدهما اصغر والاخرى نصف الدور اويكون احدهما اصغر والاخرى اعظم او يكون احدهما نصف الدور والاخرى اعظم وهذه ستة اقسام اما الاول فقدمر بيانه واما الثانى فلا يمكن وقوع هذه الدعوى فيه واما الثالث فراجع الى القسم الاول لانا اذا فرضنا فى الصور المذكورة القوس الاولى قوس اى ح والقوس الاخيرة قوس اى ب كان الشكل والبيان ماتقدم ذكره واما الرابع فحكمه حكم الثانى فكذلك السادس واما الخامس فيصير فيه شكلا التفصيل والتركيب متبادلين فان فى التفصيل اذا كان احد القوسين اب والاخرى

جيبى القوسين النظير الى النظير فليكن قوسا اب اج المختلفين المتشاركين فى حد
ا المنطبق احديهما على الاخرى فى دآئرة ابج والفضل بينهما بج وليخرج
وتر بج وقطر اد الى ان يتلاقيا على ه اقول نسبة به الى جه كنسبة
جيب قوس اب الى جيب قوس اج

برهانه يخرج عمودى بر جح على قطر اد فيكونان جيبى قوسى اب اج ويكون
مثلثا هحج هرب متشابهين لاشتراك زاوية ه وتساوى قائمتى ر ح فاذن نسبة به



الى جه كنسبة بر الى حج الجيبين وذلك ماردناه وهذا الحكم ان كانت الملاقاة
بين الوتر والقطر فى جهة ا على هذه الصورة اما اذا كان وتر الفضل موازيا للقطر
كان جيبا القوسين اعنى عمودى بر جح متساويين لتوازيهما ووقوعهما بين خطين
متوازيين وكون الاضلاع المتقابلة من السطوح المتوازية الاضلاع متساويا



ولتساوى الجيبين تكون كل واحدة من القوسين مساويا لتمام الاخرى من نصف
الدور فيكونان فى حكم المتساويين ونظيره هذه الصورة من الشكل الاول ان يكون
مجموع القوسين المتصلين نصف الوتر فان وتر المجموع حينئذ يكون ايضا قطرا
وتقاطع القطر الاول عند المركز ويكون كل قوس تمام الاخرى من نصف الدور
وانما اشرطنا فى الدعوى اختلاف القوسين لانهما اذا تساويا فى الشكل الاول
انطبق جيباهما على الوتر وفى الشكل الثانى انطبق الجيب على الجيب ولم تكن الدعوى

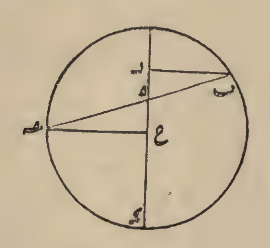


في مقدمات الشكل الموسوم بالقطاع الكرى وفيما لا تتم فوائد الشكل الا به ثلثة فصول

الفصل الاول

في مقدمات الشكل الموسوم بالقطاع الكرى

اذا اتصلت قوسان مختلفتان من دائرة واحدة على نقطة وكانت كل واحدة منهما اصغر من نصف الدائرة فان القطر المار بنقطة الاتصال يقسم وتر مجموع القوسين الى قسمين تكون نسبة احدهما الى الاخر كنسبة جيب القوس التي تليه الى جيب القوس التي تلى الاخر وليكن قوسا اب اجـ المختلفتين من دائرة ابجـ متصلتين على نقطة ا وبجـ وتر مجموعهما وا د القطر المار بنقطة ا وقد قسم وتر بجـ على ه بقسمى به هجـ اقول فنسبة به الى هجـ كنسبة جيب قوس با الى جيب قوس اجـ برهانه يخرج عمودى بز جـح على قطر اد ولا شك انهما عمودا القوس فيكون مثلثا بهز حجـه الحادثان متشابهين لتساوى زاويتى ه المتقابلتين



وكون زاويتى ز ح قائمتين فاذن نسبة بز الى جـح كنسبة به الى هجـ وذلك ما اردناه واذا انطبقت احدى قوسين مختلفين كل واحدة منهما اصغر من نصف الدائرة على الاخرى في دائرة بحيث يتشاركان في حد واحد واخرج لفضل الاطول منهما على الاقصر وتر فلاقى القطر المار بالحد المشترك بعد اخراجهما كانت نسبة مايقع بين طرف كل قوس و بين الوتر احدهما الى الاخر كنسبة

	الخطوط المتساوية		الخطوط المتناسبة			
١	ا ب	ا ه	ب د	د ز	ا ه	ز ج
٢	ا ب	ب ه	ا د	د ج	ز ه	ز ج
٣	ا ب	ا ج	ا د	ز ه	د ج	ب ه
٤			د ب	ه ج	د ز	ا ه
٥	ا د	د ب	ا ج	ج ه	ز ب	ه ز
٦	ا د	ا ج	د ب	ب ز	ه ج	ه ز
٧	ا د	د ج	ا ب	ب ه	ز ج	ه ز
٨	ا د	ه ز	ا ب	ز ج	ه ب	د ج
٩			د ب	ج ه	ب ز	ا ج
١٠	د ب	د ز	ب ا	ا ه	ز ج	ج ه
١١	د ب	ب ز	د ا	ا ج	ه ز	ج ه
١٢	د ب	ه ج	ب ا	ز ج	ا ه	ب ز
١٣			د ا	ه ز	ا ج	ب ز
١٤	ا ج	د ج	ا ه	ه ب	د ز	ب ز
١٥	ا ج	ب ز	ا ه	د ز	ب ه	د ج
١٦			ه ج	د ب	ز ه	د ا
١٧	ا ه	ه ج	ا ب	ب د	ز ج	د ز
١٨	ا ه	ه ب	ا ج	ج د	ب ز	د ز
١٩	ا ه	د ز	ا ج	ب ز	د ج	ب ه
٢٠			ج ه	د ب	ز ج	ا ب
٢١	ه ج	ه ز	ج ا	د ا	ب ز	د ب
٢٢	ه ج	ز ج	ا ه	ا ب	د ز	ب د
٢٣	ب ه	د ج	ب ز	ا ج	د ز	ا ه
٢٤			ه ز	د ا	ز ج	ب ا
٢٥	ب ز	ز ه	ب د	د ا	ج ه	ج ا
٢٦	ب ز	د ز	ب ه	ا ه	ج د	ج ا
٢٧	ز ه	ا ج	ز ب	ب ا	د ج	د ا
٢٨	د ز	ز ج	د ب	ب ا	ج ه	ا ج

النسب فيها على تقدير تعطل كل ركن ومثلث كان ماذكره مع العلم باحوال النسب المؤلفة كافيا فى هذا الباب ولاشتمال هاتين النسبتين على جميع النسب بالقوة اقتصر بطلميوس على بيانهما لالعدم احتياجه الى غيرهما من النسب فانه استعمل فى النوع الحادى عشر من المقالة الثانية من كتاب المجسطى كون نسبة ره الى هب مؤلفة من نسبتى رح الى حد و دب الى اب وفى النوع السادس من المقالة الثامنة كون نسبة اب الى بد من نسبة اه الى هح ونسبة حر الى رد من غير تقديم بيانهما فهذا ماعندى فى هذا الموضع

الفصل الحادى عشر

فى النسب البسيطة الواقعة فى هذا الشكل

النسب البسيطة تقع فى هذا الشكل بشرط تساوى حدين من حيزين فى النسبة المؤلفة كما قدمنا بيانه فى المقالة الاولى ونعيد القطاع لحصرها ونقول قدتبين مما مر ان كل واحد من الخطوط الاثنى عشر الواقعة فى الشكل يشارك خمسة من الخطوط فى النسبة ويكون احد تلك الخطوط فى القوة كخطين فتكون المشاركة له مع ستة والاثنا عشر فى الستة اثنان وسبعون والنسب البسيطة تقع عند تساوى حدين منها لكن الخط لايمكن ان يساوى جزؤه والجزء لايمكن ان يساوى كله والاركان اربعة ولكل واحد جزؤان فيسقط للامتناعين المذكورين ستة عشر من جملة ذلك ويبقى ستة وخمسون ولكون حكم المساواة فى الجانبين واحد اعنى كون خط مساويا لاخر وهو كون ذلك الاخر مساويا لهذا يكون اعتبار المساواة بين ثمانية وعشرين لثمانية وعشرين كافيا فاذن فى ثمانية وعشرين صورة تتناسب اربعة خطوط وقد وضعنا فى جدول هكذا ثم اذا اعتبر عكس هذه النسب وتركيبها وتفصيلها وابدالها وقلبها وغير ذلك من لوازمها صارت النسب كثيرة ولنختم الكلام فى القطاع السطحى ههنا وبالله العون والعصمة والتوفيق

وان اردنا فى الاشكال الثمانية والاربعين التى ذكرناها بحسب اعتبار الجهات صار عدد الدعاوى ١٣٨٢٤ حصل من ضرب ٢٨٨ فى ٤٨ وعدد البراهين حصل من ضرب ٦ فى العدد المتقدم هكذا ٨٢٩٤٤ واذا جعل لكل نسبة لوازم من خمس وثلثين نسبة كما بينا فى النسب المؤلفة صارت الدعاوى ٦٦٤ ٤٩٧ كل واحدة مشتملة على ثلث نسب وهذه النسب وان كانت متكررة مرات لكن اعتبارها من حيث كونها ملزومة لاخرى غير اعتبارها من حيث كونها لازمة فانظر فى هذا الشكل الصغير كيف استلزم جميع هذه النسب ذلك تقدير العزيز العليم

وقد اقتصر بطلميوس من جميع هذه النسب على بيان ضربين من الدعوى الاولى احدهما يعرف بتركيب بطلميوس والاخر يعرف بتفصيله والسبب فيه ان الواقف عليهما مع وقوفه على لوازم النسب المؤلفة يعرف ثبوت باقى الضروب



ولنعد لبيان الشكل ونقول دعوى تركيبه هى ان نسبة ب ا الى ا ء مؤلفة من نسبتى ب ه الى ه ز و ز ح الى ح ء وفى هذه الصورة خط ا ح هو الركن المعطل ومثلث ب ء ز هو المثلث المعطل وتبقى النسبة بين الخطوط الستة الباقية وباعتبار لوازم المؤلفة تصير ثمانية عشر منها تقع فيها النسبة بين هذه الخطوط معلومة واذا جعلنا الركن المعطل خط ا ب والمثلث المعطل مثلث ه ز ح كانت الصورة مثل الاول بعينه الا ان نقطة اليمين واليسار تبادلت وتصير بعين البيان الاول ثمانية عشر نسبة اخرى معلومة وايضا دعوى تفصيله هى ان نسبة ب ء الى ء ا مؤلفة من نسبتى ب ز الى ز ه و ه ح الى ح ا وفى هذه الدعوى يكون خط ء ح الركن المعطل ومثلث ا ه ب المثلث المعطل ويصير ببيانه الذى ذكر ثمانية عشر نسبة اخرى معلومة وان جعلنا خط ه ب الركن المعطل ومثلث ا ء ح المثلث المعطل كانت الصورة مثل الاول الا ان النقط التى فى الجانبين تبادلت وتصير بعين البيان الاول ثمانية عشر نسبة اخرى معلومة وتكون جميع النسب المعلومة اثنتين وسبعين وتصير باعتبار العكس والخلاف اربعة اضعافه ولما كانت الاركان اربعة وكذلك المثلثات وقد تبينت

من الزاوية الأولى وحدا الثانية بين المؤلفة والمتمم بين حدى الاولى عند خروجه من الزاوية الثانية والباقى كما كان حالة الاستوآء وان صارت الدعوى مشوشة فان خرج الموازى عن الاولى او الثانية جعلنا المتمم بين حدى المؤلفة حتى تحصل نسبتان مساويتان للاولى والثانية فى الزاوية الاولى على الاضطراب وفى الثانية على الانتظام وان خرج الموازى عن المشتركة كان الحال كما فى المرتبة وان كانت مع التشويش منعكسة انعكس الاضطراب والانتظام فى الزاويتين المذكورتين ولانطول الكلام بايراد الامثلة وههنا قدتم الكلام فى اقامة البراهين على جميع الدعاوى المذكورة

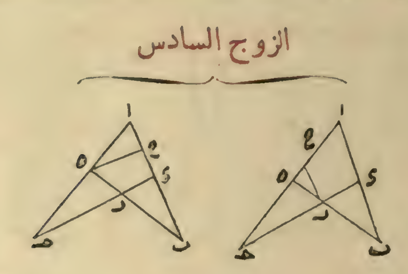
الفصل العاشر

فى حصر دعاوى هذا الشكل ونسبتها والبراهين عليها وفى علة اقتصار بطلميوس على ضربين من الدعوى الاولى فقط

وضع بعض اهل هذا العلم لكل ضرب دعوى بينوه بالبرهان جد ولا يثبت فيه النسب الثمانية عشر المتلازمة التى يكون ذلك الضرب احديها وليس فى ذلك الاطناب فآئدة ولذلك لم نشتغل بها اما فى حصر الضروب فنقول لما كانت الخطوط اثنى عشر وكان لكل واحد منها الى كل واحد من خمسة خطوط نسبة مؤلفة من نسبتين وكان واحد من الخمسة فى قوة خطين لاشتمال تأليفه على نوعين متناسبين كانت النسبة المؤلفة وحدها بالفعل ستين وبالقوة اثنين وسبعين والمؤلفة منها مائة واربعةوار بعين والجميع مائتان واربعة اما الاثنتان والسبعون التى عدد المجموع اعنى عدد كل مؤلفة جمع بسيطتها فتتضاعف مرتين بالترتيب والتشويش وعكسيهما وتصير مائتين وثمانية وثمانين كل واحدة منها مشتملة على ثلث نسب وعلى كل واحدة منها ستة براهين ويكون عدد البراهين الفا وسبعمائة وثمانية وعشرين ثم ان اردنا هذه الدعاوى والبراهين فى الاشكال الاثنى عشر يعنى اختلاف اوضاعه التى اعتبرها اهل هذا العلم صارت الدعاوى ٣٤٥٦ والبراهين حصل من ضرب ٣٤٥٦ فى ٦ = ٢٠٧٣٦



الزوج السادس



فاذا جعلنا حدى الثانية متوسطين بين المؤلفة صارت هكذا به بز اج ءج واذا جعلنا المتمم بين حدى الاولى صارت هكذا اه هح ءز وكانت نسبة به الى بز كنسبة هح الى ءز فى الشكل الاول وكنسبة ءح الى ءز فى الشكل الثانى ونسبة اج الى ءج كنسبة اه الى هح فى الاول وكنسبة اه الى ءح فى الثانى واما فى الزوج الثالث الذى خرج فيه الموازى من زاوية ج اعنى الثانية فاذا جعلنا حدى الاولى متوسطين بين المؤلفة صارت هكذا به اه ءز ءج فاذا جعلنا المتمم متوسطا بين حدى الثانية صارت هكذا بز جح بح اج فكانت نسبة بز الى بح فى الشكل الاول ونسبة بز الى جح فى الشكل الثانى كنسبة ءز الى ءج ونسبة بح الى اج فى الاول او نسبة جح الى اج فى الثانى كنسبة به الى اه واما فى الزوج السادس الذى خرج فيه الموازى من زاوية ز المشتركة فان جعلنا حدى الاولى بين المؤلفة صارت هكذا به اه ءز ءج وجعلنا المتمم بين حدى الثانية صارت هكذا بز زح اح اج وكانت نسبة بز الى اح فى الشكل الاول والى زح فى الشكل الثانى كنسبة به الى اه ونسبة اح فى الاول وزح فى الثانى كلتيهما الى اج كنسبة ءز الى ءج وان جعلنا حدى الثانية بين المؤلفة صارت هكذا به بز اج ءج والمتمم بين حدى الاولى هكذا اه زح ءز وكانت نسبة به الى بز كنسبة اه الى اح فى الشكل الاول والى زح فى الشكل الثانى ونسبة اج الى ءج كنسبة اح فى الشكل الاول وزح فى الثانى كلتيهما الى ءز وظهر ان التساوى بين النسب فى الزاويتين الاولى والثانية كانت على الاضطراب وفى المشتركة بالوجهين على الانتظام وقس على ذلك ان كان الركن المطل اج فان انعكست النسبتان وجب ان نجعل حدى الاولى متوسطين بين المؤلفة والمتمم بين حدي الثانية عند خروج الموازي



الفصل التاسع

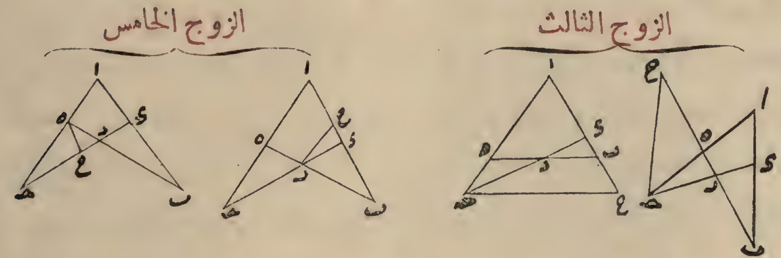
فى اقامة البراهين على ضروب الدعوى الثالثة

اذا كانت الدعوى الثالثة مرتبة فان كان الموازى خارجا من الزاوية الاولى جلعنا حدى النسبة الثانية متوسطين بين حدى المؤلفة والمتم متوسطا بين حدى النسبة الاولى وتكون الاولى والاخيرة من هذين مساويتين للاخير والاولى من تلك الثلث على الاضطراب وان كان الموازى خارجا من الزاوية الثانية كان بالعكس بجعل حدى النسبة الاولى متوسطين بين حدى المؤلفة والمتم متوسطا بين حدى النسبة الثانية وتكون المساواة بين هاتين النسبتين وتين من تلك الثلث على الاضطراب وان كان خارجا من الزاوية المشتركة امكن كلا الوجهين ان اردنا جعلنا حدى النسبة الاولى بين حدى المؤلفة والمتم بين النسبة الثانية فان اردنا جعلنا حدى النسبة الثانية بين حدى المؤلفة والمتم بين حدى الاولى ولكن تكون الاولى والاخيرة من النسب الثلث مساويتين للاولى والاخيرة من النسبتين فى كلى الوجهين على الانتظام ولنورد ههنا مثالا ولتكن الدعوى ان نسبة ب ه الى ه ح مؤلفة من نسبتى ا ه ء ر و ب ر ا ح ان جعلنا الركن المعطل ا ب اومن نسبتى ا ء ه ر ومن ا ب ر ح ان جلعنا الركن المعطل ا ح



برهانه ان جعلنا الركن المعطل ا ب كان المثلث المعطل ه ر ح والزاوية الاولى زاوية ه والزاوية الثانية ح والزاوية المشتركة زاوية ر ولنورد الاشكال الستة الرابعة وهى هذه

اما فى الزوج الخامس الذى خرج فيه الموازى من زاوية ه اعنى الأولى



من ثلث نسب اثنان منها متساويان الثانية وحدها والثالثة هى الاولى وحدها وذلك ماأردناه وعلى ذلك تعين فى سائر الاشكال وان انعكست النسبتان اعنى الاولى و الثانية صارت الاحكام بعكس ماقلنافى المرتبةاعنى ان كان الموازى خارجا عن الزاوية الاولى جعلنا المتمم سابقا على حدى الاولى وان كان خارجا عن الزاوية الثانية جعلناه لاحقا بحدى الثانية و ان كان خارجا عن الزاوية المشتركة جعلناه متوسطا بين حدى المؤلفة كما كان فى الأولى الثانية وان تشوشتا مع الانعكاس فان كان الموازى خارجا عن الزاوية الاولى جعلنا المتمم سابقا على حدى الثانيـة وان كان خارجا عن الزاوية الثانية جعلناه لاحقا بحدى الاولى الثانية و ان كان خارجا من الزاوية المشتركة جعلناه متوسطا بين حدى الاولى وجعلنا حدى الثانية متوسطين بين حدى المؤلفة وعلى الجملة يتعلق بالاول ماكان متعلقا بالثانية وبالعكس وعليك ايراد الامثلة

الفصل الثامن

فى اقامة البراهين على ضروب الدعوى الثانية

اذا كانت الدعوى الثانية مرتبة فان كان الخط الموازى خارجا من الزاوية الاولى جعلنا المتمم لاحقا بحدى النسبة الاولى وان كان خارجا من الزاوية الثانية جعلناه سابقا على حدى الثانية وان كان خارجا من الزاوية المشتركة جعلناه متوسطا بين حدى المؤلفة ليتم البرهان على قياس ما تقدم وان كانت الدعوى مشوشة وكان الموازى خارجا من الزاوية الاولى جعلنا المتمم لاحقا بحدى النسبة الاولى وان كان خارجا من الزاوية الثانية جعلناه سابقا على حدى الأولى ايضا وان كان خارجا من الزاوية المشتركة جعلنا المتمم متوسطا بين حدى الثانية وجعلنا حدى الأولى متوسطين بين حدى المؤلفة وتكون الاولى والثانية من هذه الثلث مساويين للثانى والاول من تينك الاثنين اعنى على الاضطراب وحكم الانعكاس على الترتيب والتشويش يكون مشابها لما تقدم ولا نطول الكلام بايراد الامثلة

الشكل الاول فلتشابه مثلثى ب ح ر ر ح ه و اما فى الشكل الثانى فلتشابه مثلثى اب ح ا ء ح فاذن المؤلفة مؤلفة من نسبة مساوية للأولى ومن الثانية وذلك ما اردناه

وايضاً فى الزوج الخامس خرج الموازى من زاوية ه المشتركة والمتمم خط ه ح فى الشكل الاول وخط ح ء فى الشكل الثانى واذا جعلناهما متوسطين فى المؤلفة صارت هكذا ب ء المقدم ه ح ح ء المتمم ء ا التالى و تكون نسبة المقدم الى المتمم كالنسبة الأولى اما فى الشكل الاول فلتشابه مثلثى ب ء ر ر ح ه واما فى الشكل الثانى فلتشابه مثلثى ب ء ر ب ح ه ونسبة المتمم الى التالى كالنسبة الثانية اما فى الشكل الاول فلتشابه مثلثى ح ح ه ح ء ا واما فى الشكل الثانى فلتشابه مثلثى ا ء ح ا ح ه فاذن النسبة المؤلفة مؤلفة من نسبتين متساويتين للاولى والثانية وذلك ما اردناه وهكذا ستة براهين قامت على هذه الدعوى فان صارت الدعوى الاولى مشوشة هكذا نسبة ب ء الى ء ا مؤلفة من نسبة ب ر الى ا ح ومن نسبة ح ه الى ه ر وكان الخط الموازى خارجا من الزاوية الاولى يجعل المتمم سابقا على النسبة الاولى حتى تصير نسبته الى مقدمها كالنسبة الثانية والى التالى كالمؤلفة وتكون المؤلفة مؤلفة من نسبة مساوية للثانية ومن النسبة الاولى وان كان الخط الموازى خارجا من الزاوية الثانية جعلنا المتمم لاحقا بحدى النسبة الاولى ايضاً حتى تكون نسبة التالى اليه كالنسبة الاولى الثانية ونسبة المقدم اليه كالمؤلفة وان كان خارجا من الزاوية المشتركة جعلنا حدى النسبة الاولى متوسطين بين حدى المؤلفة على الولاء حتى يحصل ثلث نسب وجعلنا المتمم متوسطا بين حدى الثانية حتى تحصل نسبتان و تكون الاولى منهما مساوية للاخيرة من الثلثة التى بين حدى المؤلفة والاخيرة مساوية للاولى منها وتبقى النسبة الاولى بينهما فى المؤلفة بحالها و يتم البرهان مثاله ان كان المتمم فى الشكل الثانى من الزوج الخامس ء ح فجعلناه متوسطا بين حدى الثانى صار هكذا ح ه المقدم ء ح المتمم ر ه التالى ا ح تالى الاولى ء ا تالى المؤلفة وكانت نسبة ب ء الى ب ر كنسبة ء ح الى ر ه لتشابه مثلثى ب ء د ب ح ه ونسبة ا ح الى ء ا كنسبة ح ه الى ء ح لتشابه مثلثى ب ء ر ب ح ه ونسبة ا ح الى ء ا كنسبة ح ه الى ء ح لتشابه مثلثى ا ح ه ا ء ح فاذن تكون المؤلفة مؤلفة

الزوج الاول الزوج الثانى

الزوج الخامس

فى هذه الصورة زاوية بَ هى الزاوية الاولى والزاوية ا هى الثانيه وزاوية
هَ هى المشتركة وفى الزوج الاول خرج الخط الموازى من زاوية اَ ويجعل
متمم النسبة هو حر فى الشكل الاول و اح فى الشكل الثانى من هذا الزوج
لاحقا بحدى النسبة الاولى فيصير هكذا بر المقدم ره التالى حر المتمم ويكون
فى الشكل الاول نسبة ره الى رح كنسبة هج الى جا وهى النسبة
الثانية لتشابه مثلثى هزج هاح ونسبة بر الى حر المؤلفة من نسبتى بر
الى ره و ره الى حر كنسبة بد الى دا المؤلفة لتشابه مثلثى برد بحا
وفى الشكل الثانى نسبة ره الى اح كنسبة هج الى جا النسبة الثانية ونسبة
بز الى اح كنسبة بد الى دا المؤلفة فتكون المؤلفة فى الحالتين مختلفة من النسبة
الاولى ومن نسبة مساوية للنسبة الثانية وذلك ماردناه



وايضاً فى الزوج الثانى خرج الموازى من الزاوية الاولى وهى زاوية
بَ والمتمم فى الشكل الاول وهو بح وفى الشكل الثانى هو حج واذا جعلناهما
سابقين على حدى النسبة الثانية صارت هكذا بح حج المتمم هج المقدم جا التالى
وتكون نسبة المتمم الى المقدم كنسبة بر الى ره التى هى النسبة الاولى اما فى

اوجه اولها ان يجعل المتمم متقدما عليهما ليحصل بينه و بين المقدم من تلك النسبة نسبة و ينضاف الى النسبة التى كانت بين المقدم و التالى فتصير نسبتين ويسمى المتمم بهذا الاعتبار سابقا عليهما و الثانى ان يجعل المتمم واسطة بين المقدم و التالى ليحصل بين المقدم و بينه نسبة و بينه و بين التالى اخرى فتحصل نسبتان و نسميه بهذا الاعتبار متوسطا بينهما و الثالث ان يجعل متأخرا بينهما حتى ينضاف الى تلك النسبة النسبة التى تكون بين التالى و بينه و تحصل نسبتان و نسميه بهذا الاعتبار لاحقا بهما و ستتضح الفائدة فى جميع هذه الاعمال ان شاء الله تعالى فهذا ما يجب ان يعرف قبل الخوض فى البراهين

الفصل السابع

فى اقامة البراهين على ضروب الدعوى الاولى

اذا كانت الدعوى مرتبة و ان اخرج الخط الموازى من الزاوية الاؤلى اعنى زاوية المقدم جعلنا المتمم سابقا على حدى النسبة الثانية ليحصل بينه و بين مقدمهما نسبة مساوية للاؤلى و بينه بين تاليها نسبة مساوية للمؤلفة و بذلك يتم البرهان و ان اخرج من الزاوية الثانية اعنى زاوية التالى جعلنا المتمم لاحقا بحدى النسبة الاولى حتى تكون النسبة بين تاليها و بينه مساوية للثانية و بين مقدمها و بينه مساوية للمؤلفة وان اخرج من الزاوية المشتركة جعلناه متوسطا بين حدى المؤلفة حتى تكون نسبة مقدمها اليه مساوية للنسبة الاولى و نسبته الى تاليها مساوية للثانية مثاله لتكن الدعوى ان نسبة $\overline{بد}$ الى $\overline{دا}$ مؤلفة من نسبة $\overline{بر}$ الى $\overline{ره}$ ومن نسبة $\overline{هح}$ الى $\overline{حا}$ وهذه الدعوى هى المسماة بتفصيل بطلميوس فلكون مثلث $\overline{ابه}$ المثلث المعطل نورد الاشكال الموسومة الستة الاولى و هى هذه



واعلم ان كل مثلث من المثلثات الاربعة الواقعة فى هذا الشكل يختص بستة من هذه الاشكال الاثنى عشر فان تلك الستة هى المستعملة فى الدعوى التى يكون مثلثها المعطل ذلك المثلث وهذا تفصيل ذلك

المثلث
المعطل اذا كان مثلث ا ب ه كانت الستة المستعملة فيه الزوج الاول والثانى والخامس ونحن نسميها بالستة الاولى

المثلث
المعطل اذا كان مثلث ا ح ى كانت الستة المستعملة فيه الزوج الاول والثالث والرابع ونحن نسميها بالستة الثانية

المثلث
المعطل اذا كان مثلث ب ى ر كانت الستة المستعملة فيه الزوج الثانى والرابع والسادس ونحن نسميها بالستة الثالثة

المثلث
المعطل اذا كان مثلث ح ه ر كانت الستة المستعملة فيه الزوج الثالث والخامس والسادس ونحن نسميها بالستة الرابعة

فظاهر ان كل زوج يتكرر فى مثلثين ومن هذا الشكل تعين ذلك التكرار واذا انتهى الخط الموازى بعد ما خرج من زاوية المثلث المعطل الى ركن حدث عنده تقاطع فلنسم ذلك التقاطع بالتقاطع الحادث ثم ان كان ذلك الركن هو المعطل

مثلث ا ح ى	فى الاول	مثلث ا ب ه
فى الثالث	فى الخامس / فى الرابع	فى الثانى
مثلث ح ه ر	فى السادس	مثلث ب ى ر

سمينا الخط الموازى تميم النسبة و نضيف هذا المتمم فى كل برهان الى حدى نسبة ليحصل بينه و بين ذينك الحدين نسبتان واضافته اليهما تقع على ثلثة

الزوج الثالث

هو الذى يخرج الخط الموازى فيهما من نقطة حـ

المثلثات المتشابهة في هذا الشكل			
مثلثا		ومثلثا	
ه ا ب	ز ج ه	ح د ب	ز ج ح
ز ج ا	ه ب ا	ز ج د	ح ب د

الزوج الرابع

هو الذى يخرج الخط الموازى فيهما من نقطة ء

المثلثات المتشابهة في هذا الشكل			
مثلثا		ومثلثا	
ه ح ز	ج د ز	ج د ا	ه ب ا
ه ا ب	ح ج د	ج د ب	ز ه ح

الزوج الخامس

هو الذى يخرج الخط الموازى فيهما من نقطة ه

المثلثات المتشابهة في هذا الشكل			
مثلثا		ومثلثا	
ح د ب	ه ج ب	ه ج ا	ز د ا
ج ه ز	د ا ز	ح د ب	ه ج ح

الزوج السادس

هو الذى يخرج الخط الموازى فيهما من نقطة ر

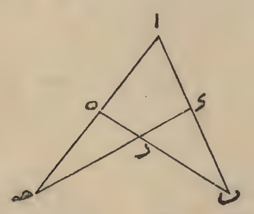
المثلثات المتشابهة في هذا الشكل			
مثلثا		ومثلثا	
ه ا ب	ج ح ز	ا د ز	ه ج ح
ه ا ب	ح ج د	د ج ب	ز ا د

الخط لا يمكن ان يكون موازيا لاحدهما ولامنتهيا الى احدهما ولكون الاركان اربعة يكون الباقى بعدالمتقاطعين ركنين اخرين ويكون الخط الموازى موازيا لاحدهما ومنتهيا الى الاخر اما التقاطع الذى يخرج منه الخط الموازى فهو احدى زوايا المثلث المعطل ابدا فالخط الموازى الخارج عنه اما ان يكون موازيا للركن المعطل منتهيا الى الركن الباقى واما ان يكون بالعكس واذا كان كذلك امكن ان يقع الخط الموازى فى كل دعوى على ستة اوجه بعدد ضعف زوايا المثلث المعطل وامكن ان يقام بكل وجه منها برهان على تلك الدعوى فتكون البراهين ستة ولما كانت النقط ستة ولم يمكن ان يخرج من كل نقطة اكثر من خطين يكون خط مواز الا على احد وجهين فتكون الاشكال لجميع البراهين على اختلاف وجوه استعمالاتها اى البراهين منحصرة فى اثنى عشرة صورة هى ستة ازواج كل زوج يشتمل على شكلين فى كل شكل اربع مثلثات كل مثلثين متشابهان والصور هذه هى



الزوج الاول هو الذى يخرج الخط الموازى فيهما من نقطة آ		الزوج الثانى هو الذى يخرج الخط الموازى فيهما من نقطة بَ	
المثلثات المتشابهة فى هذا الشكل	المثلثات المتشابهة فى هذا الشكل	المثلثات المتشابهة فى هذا الشكل	المثلثات المتشابهة فى هذا الشكل
مثلثا | ومثلثا	مثلثا | ومثلثا	مثلثا | ومثلثا	مثلثا | ومثلثا
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
ا، ب، ج، د، ه، ز	ا، ب، ج، د، ه، ز	ا، ب، ج، د، ه، ز	ا، ب، ج، د، ه، ز

بين ب ا ر حـ المحصورين بين ركنى ا حـ ب ه فان جعلنا ركن ا حـ معطلا كان مثلث ب ى ر معطلا وكانت زاوية ب زاوية المقدم وزاوية ر زاوية التالى وزاوية ى



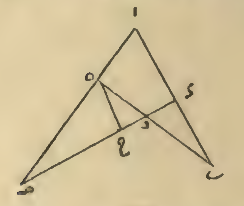
المشتركة وتكون نسبة ب ا الى ر حـ مؤلفة من نسبة ب ه الى ى حـ المحصورين بين ب ا ا حـ ومن نسبة ى ا ى ه المحصورين بين ركنى حـ ا حـ ى وان جعلنا ركنى ب ه معطلا صار المثلث المعطل مثلث ا ى حـ وكانت زاوية ا زاوية المقدم وزاوية حـ زاوية التالى وزاوية ى المشتركة وتكون نسبة ا ب الى حـ ر المحصورين بين الركنين المذكورين مؤلفة من نسبة ا ه الى ى ر المحصورين بين ا ب ب ه ومن نسبة ى ب حـ ه المحصورين بين ب ه ى حـ وقس الانعكاس والتشويش عليه وقد ظهر ان احد الحاصرين من الاركان الاربعة فى النسب الثلث هو الركن المعطل فانه مع كل ركن من الباقية يحصر حدى نسبة منها وظهر ايضا ان كل نسبة مؤلفة فى هذه الدعوى تتألف تارة من نسبتين فى اربعة حدود وتارة من اخريين فى اربعة اخرى وذلك لكون ركن المعطل احد ركنين لابعينه ومن هذا المعنى يتبين ماقلناه من كون المشارك لكل خط بالمشاركة الثالثة خطا واحدا هو فى قوة خطين وههنا تمام الكلام فى ضبط الدعوى

الفصل السادس

فى ابتداء الكلام فى براهين هذه الدعاوى

نحتاج فى اقامة البرهان على هذه الدعاوى الى اخراج خط من نقطة تقاطع معين على موازاة خط معلوم حتى يحدث اربعة مثلثات كل اثنين منها متشابهان ولنسم ذلك الخط بالخط الموازى واذا خرج خط من نقطة تقاطع خطين فذلك

المشاركة الاولى ولنعد الشكل ونقول لتكن نسبة اب الى به مؤلفة من نسبة اد



دج ومن نسبة جز الى زه فيكون اج الركن المعطل و بدز المثلث المعطل واعتبر سائر ماقلنا فى خطوط الشكل ونحن لانعيده لئلا يطول الكلام

الفصل الخامس

فى ضبط حدود ضروب الدعوى الثالثة

المشاركة فى هذه الدعوى من جنس المشاركة الثالثة اعنى يكون المقدم والتالى فى النسبة المؤلفة وغيرها محصورين بين ركنين من اركان الشكل وكل واحد من ذينك الركنين يصلح لان يجعل ركنا معطلا ويكون المثلث المعطل بحسبه مايحيط به النقط الثلث الباقية وتبقى الست الباقية من الخطوط حدودا للنسب الثلث والزوايا الثلث من المثلث المعطل تكون المشتركة منهاهى التى يكون منها مبدأ تالى النسبة الاولى ومقدم النسبة الثانية وزاوية المقدم التى يكون منها مبدأ مقدمى المؤلفة والنسبة الأولى وزاوية التالى التى يكون منها مبداء تالى المؤلفة والنسبة الثانية ويكون انتهاء جميع الخطوط الستة الى الركن المعطل فتكون المشاركة بين مقدم المؤلفة ومقدم الاولى و بين تالى المؤلفة وتالى الثانية من جنس المشاركة الثانية و بين مقدم المؤلفة ومقدم الثانية و بين تالى المؤلفة وتالى الاولى من جنس المشاركة الاولى هذا اذا كانت الدعوى مرتبة و اما اذا انعكس النسبتان فصارت المشاركة بين مقدمى المؤلفة والاؤلى وتالى المؤلفة والثانية من جنس الاول و بين مقدمى المؤلفة وتالى المؤلفة والاؤلى من جنس المشاركة الثانية و اذا صارت الدعوى مشوشة صارت المشاركة من حدى النسبة الاولى من المشاركة الاولى و بين حدى النسبة الثانية من المشاركة الثانية فلنعد الشكل ولتكن النسبة

واما عكس النسبتين فظاهر وتصير فيه الامور المذكورة بخلاف ماحكيناه واما التشويش فبأن نقول نسبة ب د الى د ا مؤلفة من نسبة ه ج الى ه ز ومن نسبة ب ز الى ا ج وبعكس النسبتين ونسبة التركيب بان نقول نسبة ا ب الى ب د مثلا مؤلفة من نسبة ا ه الى ه ج ومن نسبة ج ز الى ز د وكذلك نسبة ب ا الى ا د مؤلفة من نسبة ب ه الى ه ز ومن نسبة ز ج الى ج د وعليك ان تتأمل فى كل واحد منها ماقدمناه

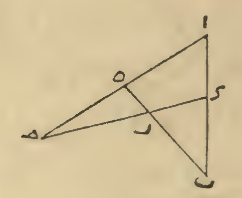
الفصل الرابع

فى ضبط حدود ضروب الدعوى الثانية

قدمران المشاركة فى الدعوى الثانية تكون من جنس المشاركة الثانية اعنى يكون المقدم والتالى فى كل نسبة فى النسبة المؤلفة محيطين بزاوية مثلث اما وتر تلك الزاوية من المثلث الذى يكون منه مقدم المؤلفة وتاليه فيكون من الركن المعطل والنقط الثلث التى هى غير التى على ذلك الركن تحيط بالمثلث المعطل على قياس مامر وتلك النقط تكون على ثلثة زواياهى ا ب ه ا د ج ه ز ج اوتارها جميعا من الركن المعطل وهى ثلث مثلثات فالمثلث الاول هو مثلث المؤلفة والثانى هو مثلث النسبة الاولى والثالث هو مثلث النسبة الثانية والزاوية الاولى التى اليها انتهاء مقدم المؤلفة ومنها ابتداء تاليها هى الزاوية المشتركة والثانية اعنى التى اليها انتهاء مقدم النسبة الاولى ومنها ابتداء تاليها هى الزاوية الاولى وزاوية المقدم والثالثة اعنى التى اليها انتهاء مقدم النسبة الثانية ومنها ابتداء تاليها هى الزاوية الثانية وزاوية التالى ومن الركن المعطل تبتدئ المقدمات الثلث واليه تنتهى التوالى جيعا وهنا تكون المشاركة بين مقدم النسبة الاولى ومقدم المؤلفة وبين تالى النسبة الثانية وتاليها من المشاركة الاولى هذا جيعا اذا كانت النسبة على الترتيب واما اذا صارت مشوشة وكانت النسبة الاولى بين مقدم النسبة التى كانت فى الاول اولى وتالى التى كانت ثانية كانت المشاركة بنيهما من المشاركة الثالثة وفى النسبة الاخرى من



كل واحد منها بين زاوية من زوايا المثلث المعطل و بين الركن المعطل واما الزاوية التى يبتدئ منها مقدما النسبة المؤلفة و النسبة الاولى فنسميه بزاوية المقدم و بالزاوية الأولى و الزاوية التى ينتهى اليها تاليا المؤلفة و النسبة الثانية بزاوية التالى و بالزاوية الثانية و الزاوية الباقيـة التى ينتهى اليها تالى النسـبة الاولى و يبتدئ منها مقدم النسـبة الثـانية بالزاوية المشـتركة و اما الركن المعطل فتنتهى اليـه المقدمات الثلثـة و تبتـدئ منه التوالى الثلثـة واذا وقعت النسـبة على هذه السـياقة كانت الدعوى الاولى مرتبة ثم ان قدمنا النسـبة الثـانية على الاولى سميناهـا بالمنعكسـة و ان جعلنا النسبة الاولى بين مقدم النسبة الثانية و تالى النسـبة الاولى اللذين مشاركتهما من المشاركة الثانية و نبق النسبة الثانية بين مقدم النسبة الاولى و تالى النسـبة الثانية اللذين مشاركتهما من المشاركة الثالثة او بعكس ذلك اعنى بالعكس منهما كانت الدعوى الاولى مشوشة و نعيد الشكل لبيان هذه الامثلة و نقول اما من ركن ا ب فنسـبة ب ء الى ء ا تكون مؤلفة من نسبة ب ر الى ر ه



و من نسبة ه ح الى ح ا فركن ا ب ركن النسبة المؤلفة و نقطة ءَ عليه الحد المشترك و نقطة بَ حد المقدم و نقطة اَ حد التالى و ء ح المار بنقطة ءَ الركن المعطل و عليها نقطة رَ ءَ حَ و النقط الباقية هى اَ بَ هَ فثلث ا ب ه المثلث المعطل و خطوط ا ب ب ه ا ه ء ر ر ح ء ح معطلة و الستة الباقية حدود النسب المذكورة و ركن ب ه المار بحد المقدم ركن النسبة الاولى الذى منه حدها و ركن ا ح المار بحد التالى ركن النسـبة الثانية الذى منه حداها و ب ء ب ر اعنى مقدمى المؤلفة و النسـبة الاولى يبتدئان من نقطتى ء ح من الركن المعطل و ينتهيان الى نقطة اَ و هى زاوية الثانى منه و ر ه تالى النسبة الاولى يبتدئ من الركن المعطل الى الزاوية المشتركة من المثلث المعطل و ه ح مقدم النسبة الثانية بعكس ذلك اى يبتدئ من الزاوية و ينهى الى الركن

الفصل الثالث

في ضبط حدود ضروب الدعوى الاولى



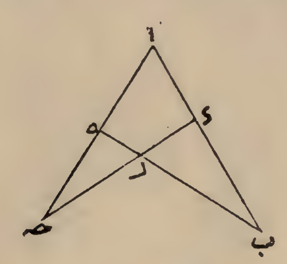
قد ذكرنا ان المشاركة بين مقدم النسبة المؤلفة وتاليها فى الدعوى الاولى تكون من المشاركة الاولى اعنى تكونان متسامتين واذا كان كذلك كان بينهما حد مشترك لا محالة هى احدى النقط الثلث التى تقع على ذلك الركن الذى هما فيه فان كان ذلك الحد طرفا للركن كان احدهما منطبقا على الاخر ويسمى بالنسبة المركبة وان لم يكن كذلك لم يكن بينهما تطابق بل يكونان متصلين على الاستقامة وتسمى النسبة بالمفصلة والنقطتان الباقيتان على الركن تكون احدهما خاصة بالمقدم والاخرى بالتالى اعنى يكونان حدين لهما بغير اشتراك فيها مثاله اذا قلنا فى الشكل الماضى نسبة ب ء الى ء ا تكون نقطة ء هى الحد المشترك ونقطة ب الحد الخاص بالمقدم ونقطة ا الحد الخاص بالتالى وتكون النسبة مفصلة واذا قلنا نسبة ب ا الى ا ء كان الحد المشترك ا وحد المقدم ب وحد التالى ء وعلى هذا القياس ويسمى الركن الذى عليه حدا النسبة بركن النسبة المؤلفة والركن الذى يقاطعه عند الحد المشترك بالركن المعطل والركن الذى يقاطعه عند حد المقدم بركن النسبة الاولى والركن الذى يقاطعه عند حد التالى بركن النسبة الثانية ويكون على الركن المعطل ثلث نقط ويبقى على الشكل ثلث نقط اخرى غيرها تحيط بمثلث ويسمى ذلك المثلث بالمثلث المعطل ويشتمل الركن والمثلث المعطلان على ستة من الخطوط جملتها معطلة فى تلك الدعوى وتبقى الستة الاخرى حدود النسب الثلث اثنان منها اللذان على ركن النسبة المؤلفة احدهما مقدمها وثانيهما تاليها واثنان على ركن النسبة الاولى يكون المقدم منهما هو المتصل بمقدم المؤلفة على زاوية المثلث من زوايا المعطل والتالى هو الباقى المتصل مع مقدمه على نقطه مسامتاله والباقى على ركن النسبة الثانية يتصل التالى منهما بتالى المؤلفة عند زاوية من زوايا المثلث المعطل ومقدمه يكون بين تالى النسبة الاولى وبين تاليه ويحيط بهذه الخطوط الستة التى هى حدود النسبة ست نقط هى نقط الركن والمثلث المعطلين يكون

ضلعان و الوقوع بين ركنين و ظاهر ان كل خط يشارك خطين بالوجه الاول و خطين
بالوجه الثانى وخطا واحدا بالوجه الثالث وتلك الخطوط هى الخمسة المشاركة له
واما الستة الباقية فتباينه ونحن سمينا هذه الامور بالمشاركة الاولى او الثانية او الثالثة
مثاله خط اى يشارك خطى اب ى ب بالمشاركة الاولى ويشارك خطى اح ى ح
بالمشاركة الثانية ويشارك خط هر بالمشاركة الثالثة و يباين الستة الباقية
وهى خطوط اه هح ى ر رح هب رب والمشاركة الثالثة وان كانت مع خط
واحد لكنها بالقوة كمشاركتين على ما يتبين من بعد وقد تبين فى المقالة الاولى ان
لكل نسبة مؤلفة من نسبتين ستة حدود واذا وقعت تلك النسبة فى هذا الشكل
كانت ستة من الخطوط الاثنى عشر حدودها وبقيت الستة الباقية معطلة و تكون
ثلثة منها ابداً متسامتة وركنها يسمى الركن المعطل وثلثة محيطة بمثلث يسمى المثلث
المعطل اما الخطوط الستة التى تكون حدود تلك النسب الثلث فلا محالة يكون
بين كل اثنين منها يقعان فى نسبة مشاركة من المشاركات الثلثة وان كانت المشاركات
التى تكون بين حدود النسب الثلثة جميعها من نوع واحد من المشاركات قلنا ان تلك
النسب مرتبة وان كانت من انواع مختلفة قلنا انها مشوشة والخطوط الثلثة الواقعة
فى حيز واحد من النسب المذكورة تكون ابداً متباينة واذ مهدنا هذه القواعد فليعلم
ان المشاركة الواقعة بين حد النسبة المؤلفة ان كانت من المشاركة الاولى سميت
دعواها بالدعوى الاولى وان كانت من المشاركة الثانية سميت بالدعوى الثانية وان
كانت من المشاركة الثالثة سميت بالدعوى الثالثة ولكل دعوى من هذه الدعاوى
ضروب كثيرة بعضها مرتبة النسب وبعضها مشوشتها وجميعها ينقسم الى اصل
وفرع والاصل هو الدعوى الاولى مرتبة والباقية فروعها على ما نبين ان شاء
الله تعالى

الفصل الثانى

فى الاشارة الى اجزآء هذا الشكل والى دعاوى النسب الواقعة فيه

هذا الشكل وان كان له بالاعتبارات المختلفة صور كثيرة لكن الجميع يرجع الى هيئة واحدة تحصل من سبابتى اليدين ووسطيه اذا جمعت انملتا السبابتين ووضعت انملة كل وسطى على وسط السبابة الاخرى وهذه صورته



وقد سمنا على تقاطعاتها بهذه الارقام فى جميع المواضع لتسهل العبارة عنها ثم نقول هذا الشكل مؤلف من اربعة خطوط غير متوازية ولا متسامتة هى خطوط اب اج دج هب ونحن سميناها باركان الشكل وهذه الاركان متقاطعة على ست نقط ا ب ج د ه ز ويقع فى كل ركن ثلثة خطوط محدودة بثلث نقط اما فى ركن اب فخطوط اب اد دب واما فى ركن اج فخطوط اج اه هج واما فى ركن دج فخطوط دج دز زج واما فى ركن هب فخطوط هب هز زب والجميع اثنا عشر خطا وايضا يقع فى هذا الشكل اربع مثلثات هى مثلثات ابه ادج بدز جزه واضلاعها الخطوط الاثنى عشر وايضا يقع بين هذه الاركان ستة ازدواجات هى بين اب به وبين اب اج وبين اب جد وبين به اج وبين به جد وبين اج جد ويقع بين كل زوجين منها خطان وجميعها هى الخطوط الاثنى عشر وكل واحد من هذه الخطوط يشارك خمسة خطوط ويباين ستة والمشاركة هى التى تقع فى نسبة مؤلفة او بسيطة هى جزؤ مؤلفة بان يكون احد المتشاركين مقدمالها والاخر تاليا والمتباينة مالاتقع فى نسبة واما المشاركة فتقع بين كل خطين يشتركان فى احد ثلثة امور هى المسامتة والاحاطة باحدى زوايا مثلث يكون الخطين

واذا اعتبرنا فى الشكل الرابع من الاربعة الاولى تقاطع الخط الرابع مع الثلثة حدث اثنا عشر شكلا اخرى كل واحد نظير لواحد من الاثنى عشر الاولى هكذا

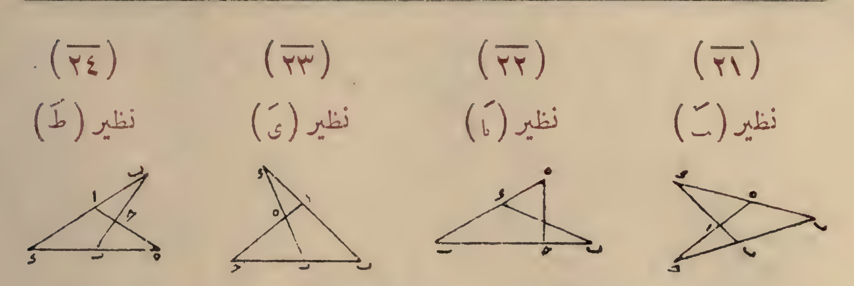
(٣٧) نظير (بَ) — (٣٨) نظير (اَ) — (٣٩) نظير (طَ) — (٤٠) نظير (يا)

(٤١) نظير (حَ) — (٤٢) نظير (زَ) — (٤٣) نظير (وَ) — (٤٤) نظير (هَ)

(٤٥) نظير (دَ) — (٤٦) نظير (جَ) — (٤٧) نظير (بَ) — (٤٨) نظير (اَ)



فهذه ثمانية واربعون شكلا تحدث بحسب اعتبار الجهات الاربع ومع قطع النظر عن الجهات يكون كل اربعة متناظرة واحداً بحسب مواقع الحروف ويرجع العدد الى اثنى عشر ولكثرة النسب الواقعة من خطوط هذا الشكل واختلاف احوالها واختلاف بياناتها اهتمت العلماء بالكلام فيه وذهبوا كل مذهب فعجز بعضهم عن ضبط اختلافاته واعرض بعضهم عنه واقبل على ما ينوب عنه وانا ما وجدت كلاما احسن من كلام حسام الدين على بن فضل الله السالار المذكور فانه اورد ما هو كائن فى ضبط الدعاوى لكنه ما تعرض لحصر البراهين وانا اوردت فى هذا الكتاب ما ذكره واضفت اليه ما سنح لي فيه والله الموفق



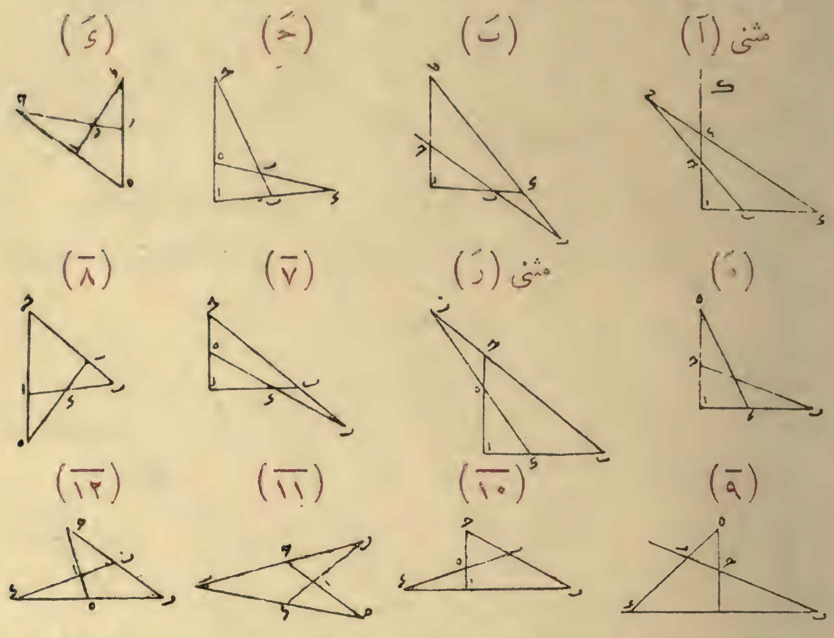
واذا اعتبرنا فى الشكل الثالث من الاربعة الاولى تقاطع الخط الرابع مع الثلثة حدث اثنا عشر شكلا كل واحد نظير لواحد من الاثنى عشر الاولى هكذا

(٢٥) نظير (هَ) — (٢٦) نظير (ىَ) — (٢٧) نظير (اَ) — (٢٨) نظير (بَ)

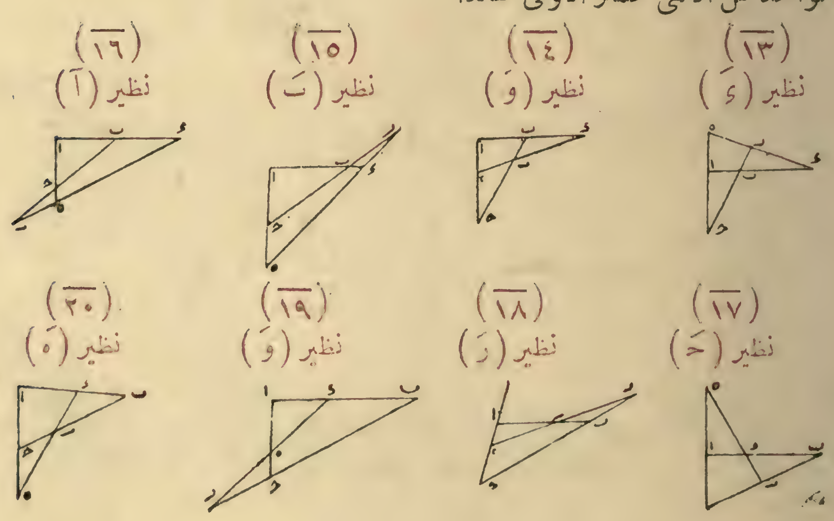
(٢٩) نظير (هَ) — (٣٠) نظير (وَ) — (٣١) نظير (رَ) — (٣١) نظير (حَ)

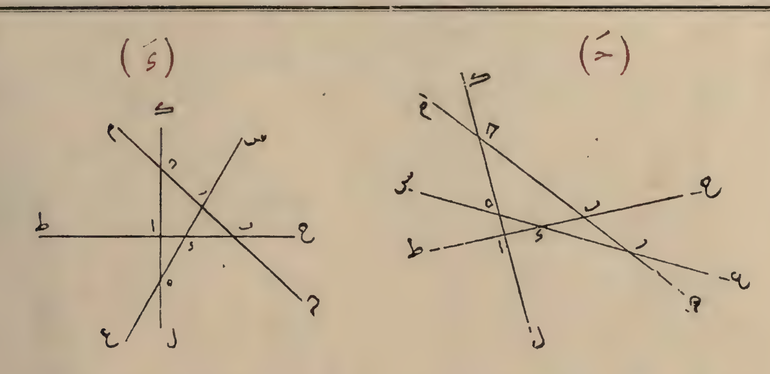
(٣٣) نظير (آ) — (٣٤) نظير (بَ) — (٣٥) نظير (هَ) — (٣٦) نظير (ىَ)

الاربعة التى حدثت اولا بحسب اعتبار خطوط ثلثة فقط و اذا حذفنا اطراف الخطوط والحروف الزوائد عن هذه الاشكال صارت على هذه الصورة

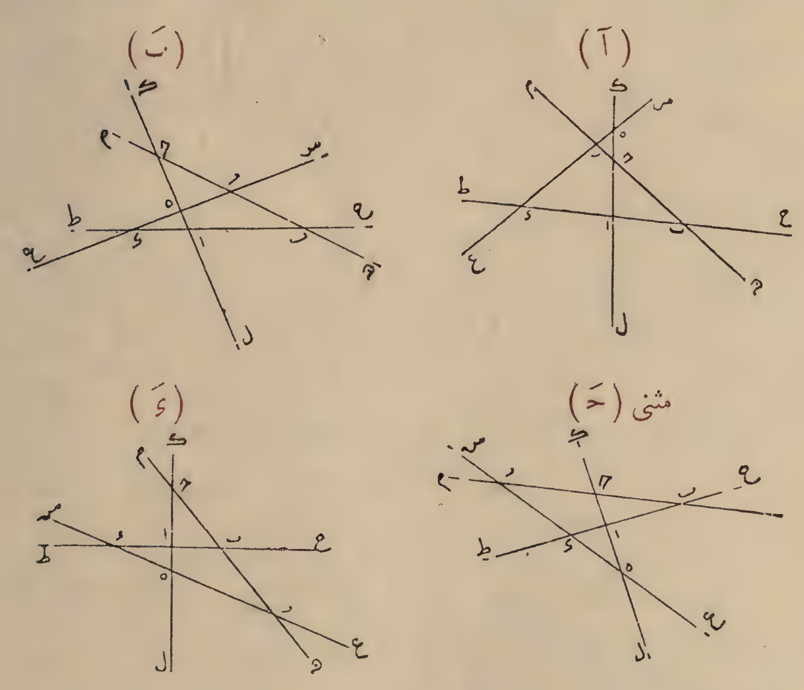


واذا اعتبرنا فى الشكل الثانى من الاربعة الاولى الخط الرابع مقاطعا لتلك الثلثة على حسب ماتقدم حدث اثنا عشر شكلا اخرى كل واحد منها نظير لواحد من الاثنى عشر الاولى هكذا





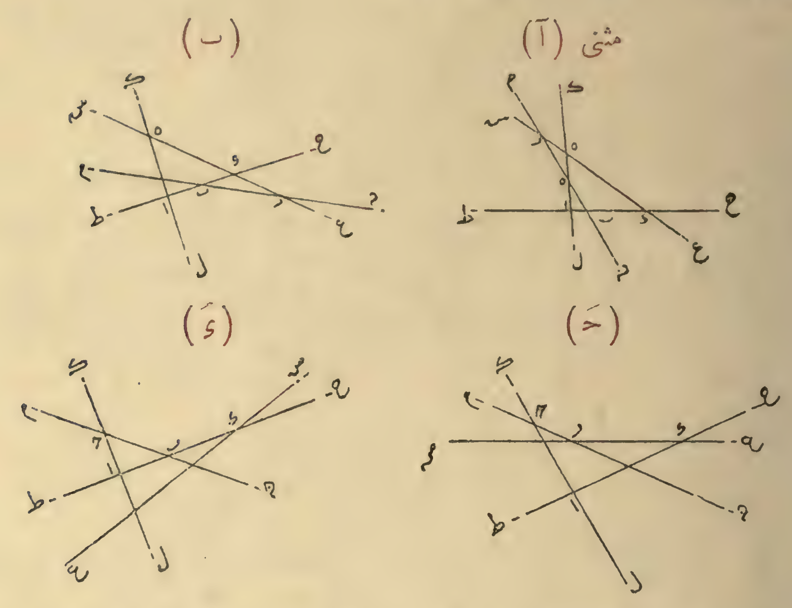
واما ان وقعت نقطة ءَ فى قسم ط ا من خط ح ط الاول فان وقعت نقطة هَ فى قسم كـ حـ وقعت نقطة رَ فى قسم م حـ لامحالة و ان وقعت فى قسم ا ل فنقطة رَ يمكن ان تقع فى قسم حـ م و يمكن ان تقع فى قسم ب ن و يكونان الشكلان مثنى و يحدث اربعة اشكال اخرى هذه صورها



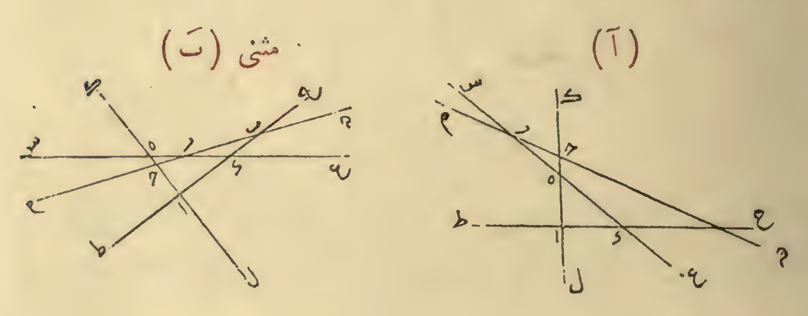
هذه الاشكال الاثنى عشر انما حدثت من اعتبار اختلاف وقوع التقاطع بين الخط الرابع مع الخطوط الثلثة التى رسمنا ها فى الشكل الاول من الاشكال



هذين الشكلين بالمثنى لوقوع نقطة ه فى كليهما فى قسم لـ ح اما ان وقعت نقطة ه فى قسم ح ا من خط ك ل قطع م ں فى قسم ب ح لامحالة و ان وقعت فى قسم ا ل قطع م ں فى قسم ب ن لاغير و يحدث من وقوع ء فى قسم ح ب اربعة اشكال هذه صورها



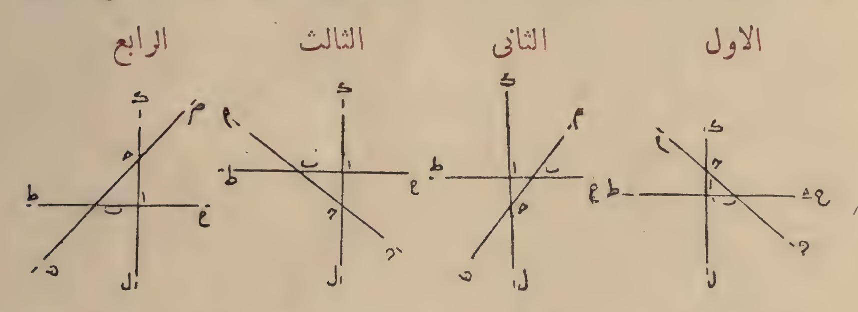
و اما ان وقعت نقطة ء فى قسم ب ا من خط ح ط فنقطة ه ان وقعت فى قسم ك ح فحينئذ يقع ز لامحالة فى قسم ب ح و ان وقعت فى قسم ح ا فحينئذ يقع ز اما فى قسم ح م و اما فى قسم ب ن و يكونان مثنى بحسب اصطلاحنا و ان وقعت فى قسم ا ل وقعت نقطة ز فى قسم ب ح لاغير وحدثت اشكال اربعة اخرى هذه صورها





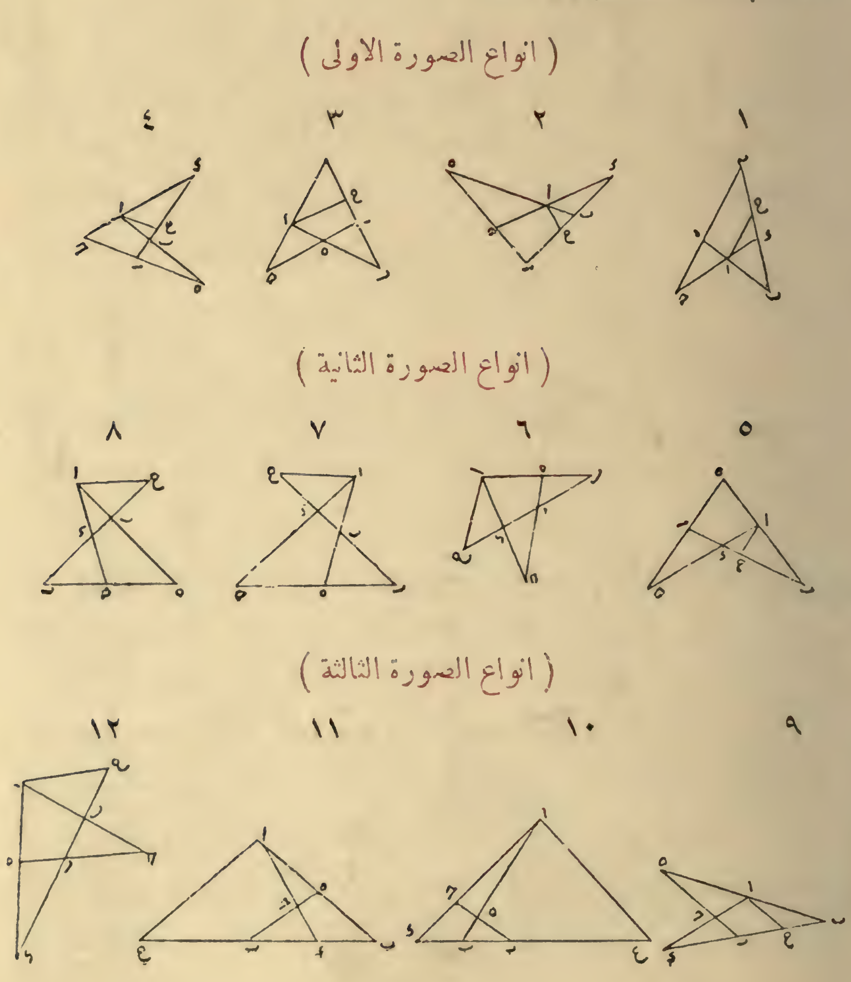
و سائر النسب التى تقع بين خطوط هذا الشكل يمكن ان يبين على الوجه المشترك ايضاً

قالوا و اذا اعتبرنا هذه الاوضاع فحوّلنا ما عن جانب اليمين الى جانب اليسار و بالعكس صارت الاشكال اربعة و عشرين والدعاوى والبراهين المشتركة تنطبق على الجميع فهذا ما قالوه ههنا و انا اقول و ان اعتبرت الجهات وجب ان يعتبر جميعها و هى بحسب السطح الواحد المستوى اربع نسبا منها اطراف خطين مستقيمين غير محدودين يتقاطعان على زوايا قائمة وانما يصير ستة بحسب اعتبار السَمْك و تقرير اعتبارها ههنا وان كان فيه تطويل بغير طائل يجرّ اليه متابعة القوم بان نقول اذا فرضنا خطين مستقيمين غير محدودين يتقاطعان على نقطة كخطى ح ط ك ل على نقطة ا وحدثت جهات حَ كَ طَ لَ الاربعة ثم اذا فرضنا ثالثا كخط م ن يقطعهما اما خط ح ط فعلى نقطة بَ و اما خط ك ل فعلى نقطة حَ حدثت مثلثات اربعة على الزوايا الاربع هكذا

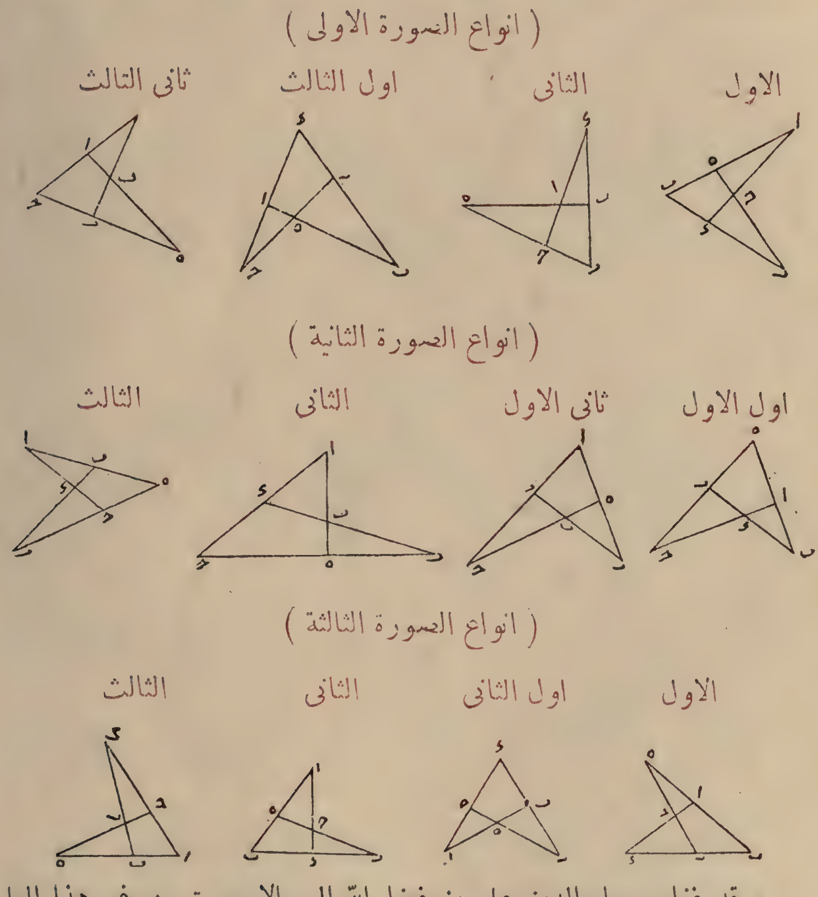


وظاهر ان كل واحد من هذه الخطوط الثلثة انقسم بثلثة اقسام مثلا فى الشكل الاول خط ح ط باقسام ح ب ب ا ا ط وخط ك ل باقسام ك ح ح ا ا ل وخط م ن باقسام م ح ح ب ب ن وكذلك فى البواقى ثم اذا فرضنا خطا رابعا وهو خط س ع فقطع خط ح ط على نقطة دَ ولا محالة يقطع نقطة دَ فى احد الاقسام الثلثة منه فان وقعت فى قسم ح ب ثم قطع خط ك ل على نقطة هَ امكن ايضاً ان يقع نقطة هَ فى احد الاقسام الثلثة من خط ك ل فان وقعت نقطة هَ فى قسم ك ح ثم قطع الخط الرابع خط م ن على نقطة زَ امكن ان يقع نقطة زَ فى قسم م ح و امكن ان يقع فى قسم ب ن و نحن نسمي

برهانه نخرج من نقطة ا خطا موازيا لخط حه الى ان يصل الى خط بد وهو خط اح ويكون نسبة خط اح الى خط حر كنسبة خط اد الى خط دح من جهة تشابه مثلثى داح دحر ونسبة خط اح الى خط ره التى هى مؤلفة من نسبة خط اد الى خط دح ومن نسبة حر الى خط هر كنسبة خط اب الى خط به من تشابه مثلى ابح هبر فاذن نسبة خط اب الى خط به مؤلفة من نسبة خط اد الى خط دح وحسن نسبة خط حر الى خط ره و ذلك ماأردناه وتصير الاشكال بزيادة الخط الموازى هكذا



ان يقطع حـه خط بد قبل قطعه لخط اب ولذلك لايختلف فيها وقوع هذا التقاطع و قد تبين ان جميع الاشكال بعد اعتبار هذا التقاطع تنحصر فى اثنتى عشر و هذه صورتها



و قد غفل حسام الدين على بن فضل الله السالارمع تبريزه فى هذا العلم عن اعتبار هذا التقاطع الاخير فقال لهذا الشكل تسع صور لاتزيد عليها و لا تنقص ثم قال و ذكر اهل هذا العلم ان له اثنتى عشرة صورة و انا مارى له وجها

ثم انهم ربما بينوا نسبة هذه الصور الاثنتى عشر بدعوى واحدة و برهان واحد ينطبق على كل واحدة منها فقالو نسبة خط اب الى خط به مؤلفة من نسبة خط اد الى خط دحـ ومن نسبة [خط حـر الى خط ره]



ثم ليقطع الخطوط الثلثة خط رابع مثلها وهو خط ه ح وليقطع خط ا د على نقطة ح وليقطع خط ا ب على نقطة ه و لايخلو اما ان تقع نقطة ه خارجة عما بين ا ب الى مايلى ا او تقع خارجة الى مايلى ب فتصير كل واحدة من الصور الثلث على ثلث صور و يصير الجميع تسعة على هذا المثال

(انواع الصورة الاولى)

(انواع الصورة الثانية)

(انواع الصورت الثالثة)

وقد اعتبر التقاطع فى هذه الصور بين خطى ا ب ا ح و بين خطى ا ب ب د و بين خطى ا ح ح ه و بقى اعتباره بين خطى ب د ح ه وليكن على ز وهذا التقاطع فى النوع الاول من الصورة الاولى و فى النوع الثالث من الصورة الثانية ففى النوع الثانى من الصورة الثانية يمكن ان يقع فى احد جهتى ب و د و يختلف بحسبه الشكل وفى باقى الوجوه لايمكن ان يقع الا على واحد فانه فى ثانى الصورتين الاولى والثانية و فى اول الثالثة يجب ان يقع هذا التقاطع فيما بين ب و د وفي ثالث الاولى والثالثة و اول الثانية يجب

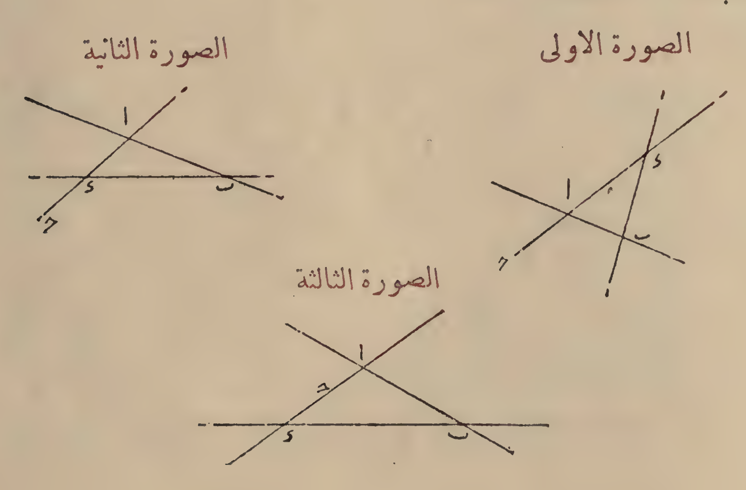
﴿ المقالة الثانية ﴾

﴿ فى الشكل القُطَّاع السطحى و مايقع فيه من النسب احد عشر فصلا ﴾

﴿ الفصل الاول ﴾

﴿ فى ماهية الشكل القطاع السطحى و ذكر صوره ونسبه مجملا ﴾

كل اربعة خطوط مستقيمة يتقاطع كل اثنين منهما ولا يتقاطع اكثر من اثنين على نقطة واحدة فالشكل الحادث منها هو القطاع السطحى و انما قيدّنا بالسطحى لانه لا يمكن ان يقع الا على سطح واحد مستو و ذكر اهل هذا العلم ان لهذا الشكل اثناعشرة صورة لايمكن ان نزيد عليها اونقص منها و بينوا ذلك بان قالوا اذا تقاطع خطان مستقيمان مثل خطى اب اج على نقطة ثم قطعهما خط ثالث مثلهما يقطع اولا خط اب على نقطة غير نقطة ا ولتكن هى نقطة ب ثم يخرج الى ان تقطع خط اج على غير نقطة ج وليكن على نقطة د فلا يخلو اما ان تقع نقطة د خارجة عما بين نقتطى اج الى مايلى آ واما ان تقع بينهما و اما ان تقع خارجة الى مايلى نقطة ج و تصير الصور بحسب هذا الاختلاف ثلثا هكذا



المضطربة تكون نسبة حَ الى ءَ كنسبة اَ الى بَ وكان بَ مساويا لءَ فيكون ايضاً اَ مساويا لحَ ولكن نسبة حَ الى حَ كنسبة هَ الى وَ فيكون نسبة اَ الى حَ كنسبة هَ الى وَ وذلك ما اردناه ولنبيّن على قياسه فى غيره من الصور

(شكل يح)

كل نسبة بسيطة فهى مؤلفة من نسبتين احدهما مثل تلك النسبة والاخرى نسبة المثل فليكن نسبة اَ الى بَ نسبة بسيطة اقول فهى مؤلفة من النسبتين المذكورتين

ا		ب
حـ	ه	ء

برهانه ليكن نسبة حَ الى ءَ كنسبة اَ الى بَ وليكن هَ مساويا لءَ فنسبة حَ الى ءَ مؤلفة من نسبة حَ هَ المساوية لنسبة حَ الى ءَ ومن نسبة هَ الى ءَ المتساويتين وهى نسبة المثل فاذن نسبة اَ الى بَ ايضاً مؤلفة منها وذلك ما اردناه و بالعكس كل نسبة مؤلفة من نسبة مفروضة و من نسبة المثل فهى فى قوة نسبة بسيطة مساوية لتلك المؤلفة وبيانه ظاهر ممّا قلنا و قد تبين من هذا ايضاً ان نسبة المثل مؤلفة من نسب مساوية لها

(شكل د)

نسبة المثل مؤلفة من اى نسبة اتفقت ومن خلافها فليكن نسبة اَ الى بَ نسبة المثل ونسبة حَ الى ءَ نسبة ما ونسبة وَ الى هَ مثل نسبة حَ الى ءَ اقول فنسبة اَ الى بَ مؤلفة من نسبتى حَ ءَ ...

ا		ب
حـ	ء	ر
	ه	و

وبرهانه ليكن رَ مساويا لحَ فلكون نسبة حَ الى ءَ كنسبة وَ الى هَ يكون نسبة ءَ الى رَ اعنى الى حَ مساوية لنسبة هَ الى وَ فيكون نسبة حَ الى رَ التى نسبة المثل مؤلفة من نسبتى حَ ءَ هَ وَ فاذن نسبة اَ الى بَ ايضاً مؤلفة منهما وظاهر انهما نسبة مفروضة وخلافها وليكن هذا اخر كلامنا فى النسب المؤلفة



اشكال	المتساويان فى الحيزين		الاربعة المتناسبة			
			الاول		الثانى	
	اول	ثانى	مقدم	تالى	مقدم	تالى
ا	ا	ب	ح	ء	و	ه
ب	ا	ح	ب	ء	و	ه
ح	ا	ه	ب	ء	و	ح
د	ء	ب	ا	ح	ه	و
ه	ء	ح	ا	ه	ب	و
و	ء	ه	ا	ب	ح	و
ر	و	ب	ا	ح	ه	ء
ح	و	ح	ا	ب	ه	ء
ط	و	ه	ا	ب	ح	ء

(شكل بـَ)

اما اذا كان المقداران المتساويان من حيز واحد فلا تستلزم نسباً بسيطة ويتبين هذا المطلوب ايضاً من وجه آخر فلنعد المثال المذكور ونجعل نسبة ءَ الى دَ كنسبة هَ الى وَ فيكون بالمساواة المنتظمة نسبة حَ الى دَ كنسبة اَ الى بَ وكان حَ مساويا لاَ فى الفرض المذكور فيكون دَ مساويا لث ونسبة دَ الى ءَ وكانت نسبة دَ الى ءَ كنسبة وَ الى هَ فاذن نسبة بَ الى ءَ كسبة وَ الى هَ وذلك ما اردناه

ا	ط	ب
ح	ء	د
	ه	و

ايضاً ان فرضنا بَ مساويا لدَ نجعل نسبة وَ الى هَ كنسبة حَ الى حَ ونسبة حَ الى ءَ كنسبة اَ الى طَ فيكون نسبة ا الى طَ كنسبة حَ الى ءَ ونسبة طَ الى بَ كنسبة حَ الى حَ المساوية لنسبة هَ الى وَ فبالمساواة

(شكل يا)

اذا تساوى مقدران من حيزين فى اى نسبة مؤلفة من نسبتين فرض كانت الاربعة الباقية متناسبة بشرط ان يكون فيما يبقى من كل حيز مقدما وتاليا اعنى يكون التناسب بالتكافى مثلا ان كانت نسبة اَ الى بَ مؤلفة من نسبتى حَ ءَ هَ وَ وكان اَ من الحيز الاول مساويا لحَ من الحيز الثانى اقول فتكون مقادير بَ ءَ هَ وَ الاربعة الباقية متناسبة على التكافى اعنى ان كان احد المتقدمين احد مقدارى بَ هَ اللذين هما من الحيز الثانى وتاليه من الحيز الاول كان المقدم الاخر احد مقدارى ءَ وَ اللذين هما من الحيز الاول وتاليه من الحيز الثانى فيكون نسبة بَ الى ءَ كنسبة وَ الى هَ ونسبة بَ الى وَ كنسبة ءَ الى هَ وعلى هذا القياس

برهانه وقد تبين فى الشكل الثالث والثلثين من المقالة الحادية عشرة من كتاب الاصول ان نسب المجسمات المتساوية الارتفاعات بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض ولما كان ههنا مجسما الحيزان متساويين وكان مقداران من الحيزين متساويين فاذا فرضنا انهما ارتفاعا المجسمين صارت المجسمان متساوى ارتفاع وتكون نسبة الارتفاع الى الارتفاع كنسبة القاعدة الى القاعدة فيكون القاعدتان ايضاً متساويتين واضلاع السطوح المتساوية المتساوية الزاويتين متناسبة بالتكافى فاذن المقادير الاربعة الباقية التى هى اضلاع السطحين متناسبة بالتكافى وذلك ما اردناه

ب		ا
	ء	ح
و	ه	

ويتبين من هذا ان النسب المؤلفة تستلزم نسباً بسيطة متشابهة بين اربعة من مقاديرها فى تسع صور تحدث من ازدواج مقادير الحيزين بالاخر وقد وضعناهما فى جدول هو هذا

الاعداد	النسبة المؤلفة		البسيطتين المؤلفة منهما			
			الاولى		الثانية	
	المقدم	التالى	المقدم	التالى	المقدم	التالى
ا	ا	ب	ح	د	ه	و
ب	ا	ب	ح	و	ه	د
ح	ا	ح	ب	د	ه	و
د	ا	ح	ب	و	ه	د
ه	ا	ه	ب	د	ح	و
و	ا	ه	ب	و	ح	د
ر	د	ب	ح	ا	ه	و
ح	د	ب	ح	و	ه	ا
ط	د	ح	ب	ا	ه	و
ى	د	ح	ب	ا	ح	د
ـا	د	ه	ب	ا	ح	و
ب	د	ه	ب	و	ح	ا
ج	و	ب	ح	ا	ه	د
د	و	ب	ح	د	ه	ا
ه	و	ح	ب	ا	ه	د
و	و	ح	ب	د	ه	ا
ر	و	ه	ح	د	ب	ا
ح	و	ه	ح	ا	ب	د

الاعداد	النسبة المؤلفة		البسيطتين المؤلفة منهما			
			الاولى		الثانية	
	المقدم	التالى	المقدم	التالى	المقدم	التالى
١	ب	ا	د	ح	و	ه
٢	ب	ا	د	ه	و	ح
٣	ب	د	ا	ح	و	ه
٤	ب	د	ا	ه	و	ح
٥	ب	و	ا	ح	د	ه
٦	ب	و	ا	ه	د	ح
٧	ح	ا	د	ب	و	ه
٨	ح	ا	د	ه	و	ب
٩	ح	د	ا	ب	و	ه
١٠	ح	د	ا	ه	و	ب
١١	ح	و	ا	ب	د	ه
١٢	ح	و	ا	ه	د	ب
١٣	ه	ا	د	ب	و	ح
١٤	ه	ا	د	ح	و	ب
١٥	ه	د	ا	ب	و	ح
١٦	ه	د	ا	ح	و	ب
١٧	ه	و	ح	ح	ا	ب
١٨	ه	و	د	ب	ا	ح

ثم انا ان اعتبرنا ترتيب النسبتين البسيطتين تضاعف العدد لامكان اختلافهما بالتقديم والتأخير وصارت النسبة المتلازمة اثنين وسبعين

التى هى مسطح بَ فى هَ الى قاعدة مجسم اَ ءَ وَ اعنى مسطح ءَ فى وَ بالتكافى كما يبين فى الشكلين الرابع والخامس بعد الثلثين من المقالة الحادية عشرة من كتاب الاصول وهو ان فى المجسّمات المتساوية نسبة الارتفاعات الى الارتفاعات كنسبة القواعد الى القواعد بالتكافى وكانت نسبة مسطح بَ فى هَ الى مسطح ءَ فى وَ مؤلفة من نسب اضلاعهما اعنى من نسبة بَ الى ءَ ومن نسبة هَ الى وَ اومن نسبة بَ الى وَ ومن هَ الى ءَ فاذن نسبة ارتفاع اَ الى ارتفاع حَ مؤلفة من احد الصفين المذكورتين و هكذا فى سائر الصور وذلك ما اردناه ولكن كل حيز مشتمل على ثلثة مقادير كانت نسبة مقادير التى من حيز الى المقادير التى فى الحيز الاخر تسعة و لكون كل نسبة مؤلفة من نسب المقادير الباقية على وجهين من التأليف تصير النسب المؤلفة الواقعة بين مقدمات احد الحيزين وتوالى الاخر على ثمانية عشر وجهاً و اذا اخذنا المقدمات من كل واحد من الحيزين تضاعفت الوجوه الثمانية عشر فصارت ستة وثلثين و يكون كل واحد من النصف الاخير خلافا لاحدى النسب من النصف الاول و بهذا الاعتبار يكون كل نسبة مؤلفة ملازمة لخمسة وثلثين نسبة مؤلفة وقد اوردنا تفصيلها فى جدول هو هذا

المجهولات	ينضرب هذا	فى هذا	ويقسم على هذا	وينضرب الخارج فى هذا	ويقسم على هذا
ا	ب	حـ	د	ه	و
ب	ا	د	حـ	و	ه
حـ	ا	و	ه	د	ب
د	ب	ه	و	حـ	ا
ه	ا	د	حـ	و	ب
و	ب	حـ	ى	ه	ا

المجهولات	ينضرب هذا	فى هذا	ويقسم على هذا	وينضرب الخارج فى هذا	ويقسم على هذا
ا	حـ	ه	و	ب	د
ب	د	و	ه	ا	حـ
حـ	ا	و	ب	د	ه
د	ب	ه	ا	حـ	و
ه	ا	د	ب	و	حـ
و	ب	حـ	ا	ه	د

ومما ذكرناه كفاية لمن له فطانة

(شكل ىَ)

اذا تالفت نسبة من نسبتين كانت نسبة كل واحد من مقادير احـدالحيزين الى كل واحد من مقادير الحيزالاخر مؤلفة من نسبتين تقعان بين المقادير الاربعة الباقية من الستّة بشرط ان يجعل مقدما هما من الحيزالذى فيه تالى المؤلفة الثانية و تاليا هما من الحيزالذى منه مقدمها فليكن نسبة اَ الى بَ مؤلفة من نسبتى حَ دَ هَ وَ اقول فيكون نسبة كل واحد من مقادير اَ دَ وَ الى كل واحد مقادير بَ حَ هَ مؤلفة من نسبتين تقعـان بين المقادير الاربعة الباقية بالشـرط المذكور مثلا تكون نسبة اَ الى حَ مؤلفة من نسبتين تقعان بين مقادير دَ وَ بَ هَ الاربعة بشرط ان يكون المقدمان من الحيزالذى فيه حَ وهما مقدار بَ هَ و التاليان من الحيزالذى فيه اَ وهما دَ وَ فتصير الدعوى هكذا نسبة اَ الى حَ مؤلفة اما من نسبتى بَ دَ هَ وَ او من نسبتى بَ وَ هَ دَ



برهانه انّا اذا جعلنا ارتفاع مجسم اَ دَ وَ مقدار اَ و ارتفاع مجسم بَ حَ هَ مقدار حَ كانت نسبة اَ الى حَ كنسبة قاعدة مجسم بَ حَ هَ

و ثانيهما على ثلثة وجوه الاول ان يطلب وسط بين حدّى المؤلفة يكون نسبة احد الحدين اليه كاحدى النسبتين البسيطتين و نسبته الى الحد الاخر كالنسبة الاخرى وطريقه هو طريق استخراج المجهول من الاربعة المتناسبة فان نسبة الوسط الى الحد المعلوم من المؤلفة يكون كنسبة احد حدى النسبة المعلومة من البسيطين الى الاخر مثاله نعيد لوح المقادير الستة فان كان المجهول اَ كانت نسبة دَ الوسط بين اَ و بَ الى بَ كنسبة هَ الى وَ فنعرف من مقادير بَ هَ دَ مقدار دَ وان كان المجهول مثلا هَ كانت نسبة اَ الى دَ كنسبة حَ الى ءَ و يتعرف من مقادير اَ حَ ءَ مقدار دَ و هكذا فى الباقية و يقع فى كل عمل ضربان و قسمتان وقد يوضع بالتفصيل فى جدول هكذا

ا	د	ب
حـ	ء	
	ه	و

المجهولات	يضرب هذا	فى هذا	ويقسم على هذا	فيحصل هذا	ثم يضرب هذا	فى هذا	ويقسم على هذا	فيحصل هذا
ا	ب	ه	و	د	د	حـ	ء	ا
ب	ا	ء	حـ	د	د	و	ه	ب
حـ	ب	ه	و	د	ا	ء	د	حـ
ء	ب	ه	و	د	د	حـ	ا	ء
ه	ا	ء	حـ	د	د	و	ب	ه
و	ا	ء	حـ	د	ب	ه	د	و

و ان لم يكن الضربان القسمتان على هذا الترتيب صارت الوجوه بحسب اختلاف التركيب كثيرة

و الثانى ان يطلب للنسبة الاولى ثالث متأخر عن حدّيه يكون نسبة تاليها اليه كنسبة مقدم النسبة الثانية الى تاليها و يكون الحال فيه كما مرّ

والثالث ان يطلب للنسبة الثانية مقدار مقدم على حديه تكون نسبة ذلك المقدم الى مقدم النسبة الثانية كنسبة مقدم الاول الى تاليها و يكون الحال كما مر

و اهل الصناعة يوردون جدولين هكذا

اما الاول فهو ان يتعرف انالمجهول من اىّ حيز و يقسم مجسم الحيز الاخر على مسطح الباقيتين من حيز المجهول فما خرج فهوالمجهول و برهانه ظاهر من الشكل الذى مرّ و اما الثانى فيستعمل على وجهين احدهما ان يتعرف ان المجهول هو اىّ حدّ من حدّى احدى النسب الثلثة ويقسم كل واحد من حدى النسبتين الاخريين على قرينه النظير على النظير حتى يتحصل مقداراها ثم ان كان المجهول من النسبة المؤلفة يؤخذ مسطح المقدارين فما كان فهو مقدار المؤلفة وان كان من احدى البسيطين يقسم مقدار المؤلفة على مقدار البسيطة المعلوم فما خرج فهو مقدار النسبة المجهولة و اذا تحصل مقدار تلك النسبة يكون نسبة الواحد الى ذلك المقدار كنسبة نظير الواحد من حدى النسبة التى فيها المجهول الى الجذر الاخر ويتحصل المجهول مثاله ان كان المجهول اَ يقسم ءَ على حَ فيحصل لَ وهو مقدار النسبة الاولى و وَ على هَ فيحصل حَ وهو مقدار النسبة الثانية وتأخذ مسطحهما وهو طَ فيكون مقدار نسبة اَ بَ وهو نظير بَ والواحد نظير اَ فيكون نسبة اَ الى بَ كنسبة الواحد الى طَ و يقسم بَ على طَ فيخرج مقدار اَ المجهول ومن البيّن ان الواقع فى هذا العمل اما قسمتان و ضربان و اما ثلاث قسمات و ضرب واحد و يكون مرجع الجميع الى معرفة المجهول من المقادير الاربعة المتناسبة فان فى الضرب نسبة الواحد الى المضروب كنسبة المضروب فيه الى الحاصل وفى القسمة نسبة الواحد الى الحاصل كنسبة المقسوم عليه الى المقسوم وان قسمتا حَ على ءَ و هَ على وَ فيصير الواحد فى المؤلفة نظير بَ والشكلان هكذا

النسبة المؤلفة		النسبة المؤلفة	
ا	ب	ا	ب
الواحد	ط	ط	الواحد
النسبة الاولى		النسبة الاولى	
ح	ء	ح	ء
الواحد	ل	ل	الواحد
النسبة الثانية		النسبة الثانية	
ه	و	ه	و
الواحد	ح	ح	الواحد

نسبة لَ طَ التى هى نسبة هَ ءَ لان هَ ءَ ضربا فى رَ فحصل لَ طَ ولكن نسبة حَ طَ كنسبة اَ بَ فنسبة اَ بَ كما كانت مؤلفة من نسبتى حَ رَ هَ ءَ فهى ايضاً مؤلفة من نسبتى حَ رَ هَ ءَ و ذلك ما اردناه ولنسمّ هذه الحالة بتبادل حدود النسبة ونقول كل نسبة مؤلفة من نسبتين فهى مؤلفة منهما بعد تبادل حدودهما

(شكل طَ)

ك	ط	ر	ه	ء	ح	ب	ا

المجسم الحاصل من ضرب مقدم النسبة المؤلفة فى تالى البسيطتين اللتين يتالف منهما تلك المؤلفة مساو للمجسم الحاصل من تالى المؤلفة فى مقدميهما فليكن نسبة اَ بَ مؤلفة من نسبتى حَ ءَ هَ رَ اقول فمجسم اَ فى ءَ فى رَ مساو لمجسم بَ فى حَ فى هَ

برهانه ليكن مسطح حَ فى هَ هو طَ ومسطح ءَ فى رَ هو كَ فتكون نسبة طَ كَ كنسبة اَ بَ و يكون اَ بَ طَ كَ اربعة مقادير متناسبة و مسطح اَ فى كَ مساو لمسطح بَ فى طَ و لكن كَ انما حصل من ضرب ءَ فى رَ فاَ فى كَ هو الحاصل من ضرب اَ فى ءَ فى رَ و ايضاً طَ انما حصل من ضرب حَ فى هَ فبَ فى طَ هو الحاصل من ضرب بَ فى حَ فى هَ فاذن المجسمان متساويان و ذلك ما اردناه

وقد جرت العادة بان توضع المقادير و نسبه الواقعة فى كل نسبة مؤلفة من نسبتين فى لوح على هذه الصورة

ا	ب
ح	ء
ه	ر

وتسمى اضلاع المجسم الاول اعنى مقادير اَ ءَ رَ بالحيز الاول وهى تقع على القطر واضلاع المجسم الثانى اعنى مقادير بَ حَ هَ بالحيز الثانى و يسمى اَ مقدم النسبة المؤلفة و بَ تاليها و حَ مقدم النسبة الاولى و ءَ تاليها و هَ مقدم النسبة الثانية و رَ تاليها وكما يستخرج المجهول من المقادير الاربعة المتناسبة بالضرب والقسمة او بالنسبة عن الثلثة الباقية اذا كانت معلومة كذلك يستخرج ههنا من الخمسة الباقية اذا كانت معلومة و لاستخراجه طريقان احدهما على وجه التركيب والثانى على وجه البسيط

برهانه ليكن نسبة اَ لَ كنسبة ءَ هَ فيكون نسبة لَ دَ كنسبة دَ حَ وايضاً ليكن نسبة طَ مَ كنسبة دَ حَ ويكون نسبة مَ كَ كنسبة ءَ هَ فنسبة اَ لَ كنسبة مَ كَ ونسبة لَ دَ كنسبة طَ مَ فبالمساواة المضطربة نسبة اَ دَ كنسبة طَ كَ وذلك ما اردناه وبوجه آخر تضعيف ءَ هَ بنسبة دَ حَ يساوى تضعيف نسبة دَ حَ بنسبة ءَ هَ لان سطح المضروب فى المضروب فيه يساوى سطح المضروب فيه فى المضروب فاذن نسبتا اَ بَ طَ كَ متساويتان

(شكل زَ)

ا ح ب حـ ء ه ر

اذا تالفت نسبة من نسبتين فخلافها مؤلف من خلافيهما فليكن اَ بَ مؤلفة من نسبتى حَـ ءَ هَ زَ اقول فنسبة اَ بَ مؤلفة من نسبتى زَ هَ ءَ حَـ

برهانه ليكن نسبة اَ حَ كنسبة حَـ ءَ ويبقى نسبة حَ بَ كنسبة هَ زَ ويكون نسبة بَ اَ مؤلفة من نسبة بَ حَ اعنى زَ هَ ومن نسبة حَ اَ اعنى ءَ حَـ وذلك ما اردناه

(شكل حَ)

ا ب حـ ء ه ر ح ك ط ل

كل نسبة مؤلفة من نسبتين فهى ايضاً مولفة من نسبة مقدم النسبة الاولى منهما الى تالى النسبة الثانية ومن نسبة مقدم النسبة الثانية الى تالى النسبة الاولى فليكن نسبة اَ بَ مؤلفة من نسبتى حَـ ءَ هَ زَ اقول فهى ايضاً مؤلفة من نسبتى حَـ زَ هَ ءَ

برهانه ليكن حَ مسطح حَـ فى هَ و طَ مسطح ءَ فى لَ و كَ مسطح ءَ فى هَ و لَ مسطح هَ فى زَ ونسبة حَ طَ مؤلفة تارة من نسبة حَ كَ اعنى نسبة حَـ ءَ ومن نسبة طَ كَ اعنى نسبة هَ زَ وتارة من نسبة حَ لَ اعنى التى هى كنسبة حَـ زَ لان حَـ زَ ضربا فى هَ فحصل حَ لَ و من

اَ بَ و بنسبة دَ هَ الباقية المساوية لنسبة حَ بَ حتى اذا نقصنا نسبة ىَ دَ من نسبة ىَ هَ بقيت نسبة دَ ه وهذا هو ايضاً التا نسبة من اخرى

(شكل هَ)

ا | ح | ب | ط | ل | ك | ى | ه | ز | ح

اذا كانت نسبة مؤلفة من نسب فتلك النسبة ايضاً يكون مؤلفة من كل نسب يساوى تلك النسب و ان كانت يخالفها فى الحدود فليكن نسبة اَ الى بَ مؤلفة من نسبة اَ الى حَ و من نسبة حَ الى بَ وليكن نسبة ىَ الى هَ كنسبة اَ الى حَ و نسبة زَ الى حَ كنسبة حَ الى بَ اقول فنسبة اَ الى بَ مولفة من نسبة ىَ الى هَ ومن نسبة زَ الى حَ

برهانه ليكن طَ هوسطح ىَ فى زَ و كَ هوسطح هَ فى حَ و لَ هو سطح هَ فى زَ وقد تبين فى كتاب الاصول ان نسبة سطح طَ الى سطح كَ مؤلفة من نسبة ىَ الى هَ ومن نسبة زَ الى حَ ونسبة طَ لَ كنسبة ىَ هَ اعنى نسبة اَ حَ ونسبة لَ كَ كنسبة زَ حَ اعنى نسبة حَ بَ وبالمساواة المنتظمة نسبة طَ كَ كنسبة اَ بَ وكانت نسبة ط كَ مؤلفة من نسبتى ىَ هَ و زَ حَ فنسبة اَ بَ ايضاً مؤلفة منهما وذلك ما اردناه



(شكل وَ)

ا | ل | ب | ط | م | ك | ى | ه | د | ح

اذا تالفت نسبة من نسب على ترتيب ما فهى مساوية لكل نسبة يتالف منها على غيرذلك الترتيب فليكن نسبة اَ بَ مؤلفة من نسبتى ىَ هَ دَ حَ على هذالترتيب و نسبة طَ لَ مؤلفة من نسبتى دَ حَ ىَ هَ على هذالترتيب اقول فنسبتا اَ بَ طَ لَ متساويتان

فاذن نسبة اَ الى ءَ مؤلفة من النسب الثلث المذكورة وهكذا القول فى عكسه و يكون ابدا عدد النسب اقل من عدد المقادير التى هى حدودها بواحد وذلك عند كون المقادير مشتركة وقد جرت العادة عند تساوى جميع هذه النسب ان يقال نسبة الاول الى الاخير كنسبة الاول الى الثانى مثلثة او مربعة بالتكرير او غير ذلك مما يقتضيه عدد تلك النسب

(شكل دَ)

ا حـ ب ء د ه

اذا كانت نسبة مؤلفة من نسب فكل نسبة تساويها تكون ايضاً مؤلفة من نسب مساوية لتلك النسب بالعدد والمقدار فليكن نسبة اَ الى بَ مؤلفة من نسبتين نسبة اَ الى حَ ومن نسبة حَ الى بَ وليكن نسبة ءَ الى هَ كنسبة اَ الى بَ اقول فنسبة ءَ الى هَ ايضاً مؤلفة من نسبتين مساويتين للنسبتين المذكورتين

برهانه ليكن نسبة اَ الى حَ كنسبة ءَ الى دَ و بالخلاف نسبة حَ الى اَ كنسبة دَ الى ءَ ونسبة اَ الى بَ كنسبة ءَ الى هَ وبالمساواة المنتظمة نسبة حَ الى بَ كنسبة دَ الى هَ فنسبة ءَ الى دَ كنسبة اَ الى حَ و نسبة دَ الى هَ كنسبة حَ الى بَ فنسبة ءَ الى هَ مؤلفة من نسبة ءَ الى د و من نسبة دَ الى هَ المساويتين المذكورتين و ذلك ما اردناه و من مثل هذا البيان والشكل يتبين انه اذا كانت نسبة ما مساوية لنسبة مؤلفة من نسبتين وتوسط بين حديهما مقدار يكون نسبة احد الحدين اليه كاحدى تلك النسبتين كانت نسبة ذلك المقدار الى الحد الاخر كالنسبة الباقية من تلك النسبتين مثلا ليكن نسبة ءَ الى هَ كنسبة اَ الى بَ المؤلفة من نسبة اَ الى حَ ومن نسبة حَ الى بَ ثم توسط بين ءَ هَ مقدار دَ وكانت نسبة ءَ اليه كنسبة اَ الى حَ كانت نسبة دَ الى هَ كنسبة حَ الى بَ و هذا المعنى هو تجزية نسبة ءَ هَ الى النسبتين المذكورتين و نقصان نسبة عن اخرى لا يتصور الابعد تجزية المنقوص منها بالمنقوصة و بالباقية مثلا اذا اردنا ان تنقص نسبة اَ حَ من نسبة ءَ هَ جزينا اولا نسبة ءَ هَ بنسبة ءَ دَ المساوية لنسبة



وليكن اَ بَ حَ هى المقادير الثلثة ولتكن نسبة اَ الى بَ كنسبة الواحد الى هَ ونسبة بَ الى حَ كنسبة الواحد الى دَ ولنضعف هَ بدَ وليحصل حَ اقول فحَ هو مقدار نسبة اَ الى حَ

برهانه هَ هو مقدار اذا ضرب فى الواحد حصل منه هَ بعينه واذا ضرب فى دَ حصل منه حَ فنسبة سطحى هَ حَ كنسبة ضلعيهما اعنى الواحد و دَ ولكن نسبة الواحد الى دَ كنسبة بَ الى حَ فنسبة هَ الى حَ كنسبة بَ الى حَ وكانت نسبة الواحد الى هَ كنسبة اَ الى بَ فبالمساواة المنتظمة نسبة الواحد الى حَ كنسبة اَ الى حَ فحَ الحاصل من هَ فى دَ هو مقدار نسبة اَ الى حَ وذلك مااردناه

و بعبارة اخرى هَ هى مقدار نسبة اَ الى بَ و دَ هى مقدار نسبة بَ الى حَ و حَ هى الحاصل من ضرب دَ هَ والواحد يعد المضروب فيه مثل ما يعد المضروب الحاصل من الضرب و الواحد يعد هَ كما يعد دَ حَ وكان الواحد يعدهَ كما يعد اَ بَ فنسبته دَ الى حَ كنسبة اَ الى بَ وكانت نسبة الواحد الى دَ كنسبة بَ الى حَ فبالمساواة المضطربة نسبة الواحد الى حَ كنسة اَ الى حَ فقدار نسبة اَ الى حَ هو حَ بعينه الذى هوالحاصل من ضرب هَ فى دَ اعنى من ضرب نسبة اَ الى بَ فى نسبة بَ الى حَ فالحاصل من ضرب نسبة اَ الى بَ فى نسبة بَ الى حَ هونسبة اَ الى حَ وذلك ما اردناه

(شكل حَ)

| ء | حـ | ب | ا

وهذا الحكم فيما نزيد من المقادير على الثلثة ثابت فليكن اَ بَ حَ ءَ اربعة مقادير من جنس واحد اقول فنسبته اَ الى ءَ مؤلفة من نسبة اَ الى بَ ومن نسبة بَ الى حَ ومن نسبة حَ الى ءَ

برهانه نسبة اَ الى حَ مؤلفة من نسبة اَ الى بَ ومن نسبة بَ الى حَ لما مرّ و اَ حَ ءَ ثلثة مقادير من جنس واحد فنسبة اَ الى ءَ مؤلفة من نسبة اَ الى حَ التى هى مؤلفة من النسبتين المذكورتين ومن نسبة حَ الى ءَ

مؤلفة من نسبة ا الى ب ومن نسبة ب الى ح وكذلك نسبة ب الى ح مؤلفة من نسبة ب الى ا ومن نسبة ا الى ح وعلى هذا القياس ولنبين كون نسبة ا الى ب مؤلفة من نسبة ا الى ح ومن نسبة ح الى ب ليقاس عليه ماعداه

برهانه نفرض واحدا به نقدر هذه المقادير ولنقدر ذلك الواحد مقدار ه كتقدير ا لح ومقدار د كتقدير ح لب ومقدار ح كتقدير ا لب فه هو مقدار نسبة ا الى ح و د مقدار نسبة ح الى ب و ح مقدار نسبة ا الى ب وذلك لكون كل نسبة سمية للعدد الذى يقدره الواحد كتقدير الاول من حدى تلك النسبة للثانى والعدد السمى للنسبة هو مقدارها وقد ذكرنا ان تأليف نسبة بنسبة هو تضعيف قدر احديهما بقدر الاخرى وتضعيف العدد بعدد اخر هو ضرب احدهما فى الاخر فاذن حاصل الدعوى هو ان ح بعينه هو الحاصل من ضرب ه فى د وذلك كذلك لان نسبة ا الى ح كانت كنسبة الواحد الى ه وبالخلاف نسبة ح الى ا كنسبة ه الى الواحد وكانت نسبة ا الى ب كنسبة الواحد الى ح فبالمساوات المنتظمة نسبة ح الى ب كنسبة ه الى ح لكن نسبة ح الى ب كنسبة الواحد الى د فنسبة الواحد الى د كنسبة ه الى ح والحاصل من ضرب الواحد فى ح كالحاصل من ضرب ه فى د والحاصل من ضرب الواحد فى كل مقدار هو ذلك المقدار بعينه فاذن ح بعينه هو الحاصل من ضرب ه فى د فاذن نسبة ا الى ب هى الحاصلة من تأليف نسبة ا الى ح بنسبة ح الى ب فنسبة ا الى ب مؤلفة من نسبتى ا الى ح و ح الى ب وذلك ماردناه وبمثله نبين فى غيرها من الصور وان تساوت النسبتان الواقعتان فى التاليف قيل ان النسبة المؤلفة هى احديهما مثناة بالتكرير

(شكل ب)

ا | ب | ح | الواحد | د | ه | ح |

وايضا نعكس الدعوى ونقول كل ثلثة مقادير متجانسة الفت نسبة الاول منها الى الثانى بنسبة الثانى الى الثالث كان الحاصل هو نسبة الاول الى الثالث

المقالة الاولى

في النسب المؤلفة واحكامها وفيها اربعة عشر شكلا

قاعدة

كما ان تقدير الكمية المنفصلة لاتتم الا بعروض بعض لوازم الكمية المتصلة لها مثل فرض تجزيتها الى غير النهاية كذلك لايتأتى تقدير الكمية المتصلة الا بعروض بعض لوازم الكمية المنفصلة لها وهو فرض تركبها من آحاد مفروضة تقدر بها تلك المقادير اما كيفية عروض لازم احد النوعين للاخر فمما يتعلق بغير هذا العلم

تذكرة

(تحديد التأليف والتجزية في النسب) ذكر في صدر المقالة السادسة من كتاب الاصول لاوقليدس ان النسبة يقال انها مؤلفة من نسب متى كانت اقدار النسب اذا ضوعفت بعضها ببعض فعلت نسبة ما ويقال النسب انها تنقسم الى نسب اذا كانت النسب متى جزيت بعضها ببعض احدثت نسبا ما

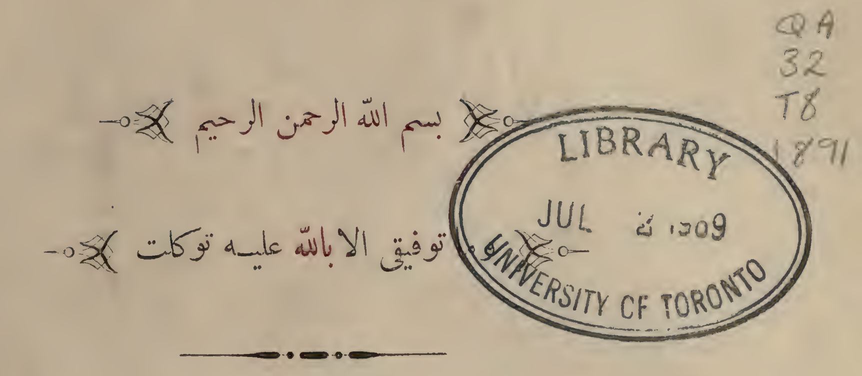
وبعد تقديم هذه القواعد اقول

(شكل آ)

ا | ج | ب | الواحد | د | ه | ح

كل ثلثة مقادير لبعضها الى بعض نسبة اعنى التي تكون من جنس واحد فنسبة كل واحد منها الى اخر مؤلفة من نسبة ذلك الواحد الى ثالثها ومن نسبة ثالثها الى ذلك الاخر المذكور

فليكن مقادير آ ب ج الثلثة من جنس واحد فاقول ان نسبة آ الى ب مؤلفة من نسبة آ الى ج ومن نسبة ج الى ب وايضا نسبة آ الى ج



بسم الله الرحمن الرحيم

توفيقى الا بالله عليه توكلت

الحمد لله مبدع الحقايق الخارجة عن الحصر افاضة للخير ومودع الدقائق الجليلة القدر فى الشئ النزر احمده على كشف السر وتبديل اليسر بالعسر واصلى على نبيه الرفيع الذكر وعلى اله اهل التقوى والبر

و بعد فقد كنت عملت فيما مضى من الزمان كتابا جامعاً لضبط دعاوى الشكل المعروف بالقطاع و براهينه مذيلاً بماينوب عنه و يتعلق به وكان ذلك باللسان الفارسى فسألنى بعض الاصدقاء من طلبة العلم ان انقله الى اللسان العربى فاجبته الى ذلك وحذفت عنه بعض الزوائد واستعنت الله تعالى انه خير موفق ومعين

اقول هذا الكتاب مشتمل على خمس مقالات كل واحدة منها تتضمن عدة اشكال وفصول

* المقالة الاولى * منها يشتمل على النسب المؤلفة واحكامها وهى متضمنة لاربعة عشر شكلا

* والمقالة الثانية * فى الشكل القطاع السطحى والنسب الواقعة فيها وهى احد عشر فصلا

* والمقالة الثالثة * فى مقدمات القطاع الكرى وفيما لا يتم فوائد الشكل الابها ثلثة فصول

* والمقالة الرابعة * فى القطاع الكرى والنسب الواقعة فيها خمسة فصول

* والمقالة الخامسة * فى بيان اصول تنوب عن الشكل القطاع فى معرفة قسى الدوائر العظام سبعة فصول

al-Ṭūsī, Naṣīr al-Dīn Muhammad ibn Muhammad
Kitāb shakl al-qiṭāʿ

كتاب شكل القطاع

اشبو كتاب صدر اسبق ابهتلو دولتلو ادهم پاشا حضرتلرینك كتبخانه سنده ال یازوسی اوله رق محفوظ اولان رساله لر ایچنده موجود بولنوب قدمای ریاضیون عندنده (شكل القطاع) دینمكله معروف ومشهور اولان شكلك علم هندسه جه ومثلثات مستویه وكرویه جه صورت استعمال وتطبیقاتنی مبین ویدنجی عصرده علوم ریاضیه نك ملل اسلامیه بیننده درجهٔ ترقیسنی مثبت اولدیغی حالده اسمی نه ومصنفی كیم اولدیغنه دائر بر كونه صراحته دسترس اولنه مامش ایسه ده بعض قرائن ودلائله توفیقاً سلطان حكمای مدققین وجامع علوم متقدمین ومتأخرین (خواجه نصیر الدین طوسینك) اثری اولمسی احتمالی غالب بولنمش اولمغله بو مثللو تدقیقات فنیه اخلافی انظارنده قرین حیز تقدیر اوله جغی امیدیله طبع ونشرینه ابتدار اولنمشدر.

معارف نظارت جلیله سنك ۳۷۰ نومرولو رخصتنامه سیله طبع اولنمشدر

قسطنطینیه

مطبعهٔ عثمانیه

۱۳۰۹

